REVISTA VIRTUAL
Universidad Católica del Norte
CATÓLICA DEL NORTE Fundación Universitaria Pioneros en educación virtual
http://revistavirtual.ucn.edu.co
No. 45| Mayo - Agosto, 2015
ISSN-0124-5821 (en línea)

Cómo citar el artículo
Briceño, O. A. & Buendía Ábalos, G. (2015). Los experimentos de diseño y la práctica de modelación: significados para la función cuadrática. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 45, 65-83. Recuperado de http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/656/1189

Los experimentos de diseño y la práctica de modelación: significados para la función cuadrática

Design Experiments and Modeling Practice: Meanings for Quadratic Function

L'expérimentation de dessin et la pratique de modelage : significations pour la fonction quadratique

Indexada Publindex-Colciencias (B), Latindex, EBSCO InformationServices,Redalyc, Dialnet, DOAJ, Actualidad Iberoamericana, Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa (IRESIE) de la Universidad Autónoma de México.

Octavio Augusto Briceño
Ingeniero Químico Universidad Industrial de Santander
Maestría en Ciencias en Matemática Educativa Instituto Politécnico Nacional Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, CICATA México
octavioco11@gmail.com

Gabriela Buendía Ábalos
Licenciatura en Actuaría Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México
Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN
Doctorado en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN
Investigadora del Colegio Mexicano de Matemática Educativa AC
buendiag@hotmail.com

Recibido: 5 de diciembre de 2014
Evaluado: 27 de abril de 2015
Aprobado: 25 de mayo de 2015
Tipo de artículo: Reflexión resultado de investigación

Resumen

La investigación se fundamenta en la aplicación de la metodología "experimentos de diseño" en estudiantes de comienzo del bachillerato (12-13 años). Para el desarrollo del trabajo se aplican experimentos de enseñanza. A través de estos se captan las interacciones, las acciones, los gestos, las contribuciones y el uso de tecnología por parte de los estudiantes. La modelación juega el papel de práctica, relacionada con la construcción de conocimiento matemático y la resignificación de aspectos variacionales de la función cuadrática.

Palabras clave

Experimentos de diseño, Función cuadrática, Modelación.

Abstract

The research presented is based on the application of the methodology of design experiments in students of the first years of high school students (12-13 years). For developing this work teaching experiments were applied. Through these experiments we capture the interactions, actions, gestures, contributions and the use of technology by students. Modeling plays the role of practice related to the construction of mathematical knowledge and the re-definition of variational aspects of the quadratic function.

Keywords

Design experiments, Modeling, Quadratic function.

Résumé

Cet article présent l'application de la méthodologie « expérimentation de dessin » chez étudiants des premières années d'éducation secondaire (12-13 années).Pour le développement de ce travail on a appliqué expérimentation d'enseignement. À travers de cette expérimentation on a capturé les interactions, les actions, les gestes, les contributions et l'utilisation de la technologie chez les étudiants. Le modelage a le rôle de la pratique, lie à la construction de la connaissance mathématique et la re-signification des aspects variationnels de la fonction quadratique.

Mots-clés

Expérimentation de dessin, Fonction quadratique, Modelage.

Introducción

La investigación que presentamos se centra en la metodología de "experimentos de diseño" planteada por Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer y Schauble (2003), para el desarrollo de actividades dentro de trabajos investigativos de cualquier índole, en especial de Matemática Educativa. En nuestro caso, dichas actividades se referirán al desarrollo intencional de la modelación en el aula para introducir la función cuadrática en estudiantes que comienzan el trasegar en el precálculo. El objetivo es poder considerar las acciones de los alumnos como seres humanos haciendo matemáticas y que estas puedan ser capitalizadas como fuente de significados para la matemática asociada a dicha función. Para ello, consideraremos la modelación como una práctica que permite argumentos, herramientas y significaciones. Modelar será traer la realidad al aula reconociendo que es factible generar una relación significativa y articulada entre el conocimiento científico y el conocimiento escolar (Arrieta y Díaz, 2015).

En ese sentido, los experimentos de diseño permitirán que las expresiones, los gestos, las interacciones entre pares y profesor, los trabajos escritos y todas aquellas acciones que realiza el estudiante, puedan ser utilizadas para recolectar datos que en algunas ocasiones pasan desapercibidos y que son necesarios para obtener evidencias y a la vez nutrir las investigaciones en Matemática Educativa.

Con estas herramientas que nos permiten analizar los elementos del contexto del aula, se pueden desarrollar mejores teorías sobre la naturaleza del aprendizaje (Baumgartner, Bell, Brophy, Hoadley His, Joseph, Orrill, Puntambekar, Sandoval y Tabak, 2003).

Los experimentos de diseño

Baumgartner et al. (2003) hacen un análisis donde argumentan que la investigación basada en experimentos de diseño combina empíricamente la investigación educativa con el papel de la teoría en ambientes de aprendizaje. Esta es una metodología importante para la comprensión de cómo, cuándo y por qué las innovaciones educativas puedan funcionar en la práctica. Estos diseños nos muestran innovaciones donde los investigadores encarnan afirmaciones teóricas específicas sobre la enseñanza y el aprendizaje, y ayudan a entender las relaciones entre la teoría educativa, el artefacto diseñado y la práctica. La investigación basada en experimentos de diseño ha sido recientemente descrita como una metodología potencialmente fructífera para generar reportes causales de aprendizaje e instrucción que podrían constituir la base para ensayos clínicos sistemáticos y aleatorios (Levin & O'Donnell, 1999).

Cobb et al. (2003) comentan que no solamente los experimentos de diseño llevan a mostrar que cierta actividad funciona, sino que también desarrollan teoría. Por ejemplo, un número de grupos de investigación que trabajan en conjunto en un ámbito como la Geometría o la Estadística podrían desarrollar una teoría del diseño que tiene que ver con el aprendizaje de las ideas de esta disciplina clave para el dominio de los estudiantes. Una teoría de este tipo podría especificar patrones sucesivos en el razonamiento de los estudiantes, junto con los medios justificados por los cuales la aparición de esos patrones sucesivos puede ser apoyada. Este énfasis en las teorías refleja la opinión de que las explicaciones y comprensiones inherentes en ellas son esenciales para una mejora educativa en un largo plazo, es decir, es un proceso paulatino.

Reimann (2011) señala que en los experimentos de diseño generalmente lo que se diseña es un "entorno de aprendizaje" completo con tareas, materiales, herramientas, sistemas de notaciones y otros elementos, incluyendo medios para secuenciar y apoyar el aprendizaje.

Los experimentos de diseño se hacen aplicables cuando se siente la necesidad de encontrar metodologías que faciliten la toma de datos de tal manera que se considere el aprendizaje en contexto. En los experimentos se utilizan el diseño y el análisis sistemático de estrategias y herramientas instruccionales, tratando de que el diseño propuesto y la investigación sean interdependientes. Con los experimentos de diseño se trata de superar la brecha con las investigaciones científicas que están totalmente desligadas de la práctica educativa. Se asume que la investigación educativa separada de la práctica puede no tener en cuenta la influencia de los contextos sobre la naturaleza compleja de los resultados o puede no identificar adecuadamente las restricciones y factores condicionantes.

El colectivo de autores denominado DBRC (The Design Based Research Collective) dice: "argumentamos que la investigación basada en experimentos de diseño puede ayudar a crear y ampliar el conocimiento sobre el desarrollo, implementación y sostenimiento de entornos de aprendizaje innovadores" (DBRC, 2003, p. 5).

Este colectivo usa la expresión "métodos de investigación basados en el diseño" (*design-based research methods*) para diferenciar su enfoque del diseño experimental clásico en la enseñanza, atribuyéndole cinco características:

1. Los fines centrales del diseño de entornos de aprendizaje y el desarrollo de teorías o "prototeorías" del aprendizaje están entrelazados.
2. El desarrollo y la investigación tienen lugar mediante ciclos continuos de diseño, implementación y análisis.
3. La investigación basada en diseño debe llevar a teorías que puedan ser compartidas con los profesores y diseñadores educativos para comunicarles implicaciones relevantes.
4. La investigación debe explicar cómo funcionan los diseños en entornos reales. También informar sobre las interacciones que refinen nuestra comprensión de las cuestiones de aprendizaje implicadas.
5. El desarrollo de tales implementaciones se basa en métodos que se pueden documentar y que permitan conectar los procesos de intervención con los resultados de interés.

Cobb et al. (2003) comentan que los experimentos se diseñan para desarrollar teorías, no simplemente para comprobar empíricamente "qué funciona". La mayoría de dichos experimentos se conceptualizan como estudios de casos orientados a apoyar el aprendizaje en grupos de estudiantes en un dominio de contenido particular. Cobb y Gravemeijer (2008) consideran tres fases para la realización de un experimento de diseño.

> **Fase 1:** *preparación del experimento.* En esta fase se tienen en cuenta elementos como el diseño de los experimentos, los cuales deben ir fundamentados en los objetivos de la investigación. También se incluyen los cuestionarios diagnósticos si se creen necesarios de realizar. Cuando se tengan los diseños experimentales se prosigue con la planeación de la instrucción enmarcada en el contexto a desarrollar.
>
> **Fase 2:** *experimentación para apoyar el aprendizaje.* En esta fase es importante la recolección de datos, es decir, que los datos permitan abordar cuestiones teóricas más amplias de las que me brinda el entorno de aprendizaje. Los investigadores realizan interpretaciones de los datos recolectados sobre la marcha de la actividad, de los participantes y el entorno de aprendizaje.
>
> **Fase 3:** *análisis retrospectivo.* Esta fase permite a través de la toma y recolección de datos analizar cada una de las actividades propuestas. La expresión "retrospectivo" permite regresar a cada una de las secuencias y reconocer y analizar cuidadosamente el quehacer del estudiante, como también el entorno y contexto en el que se desarrolló la actividad.

En nuestra investigación los experimentos de diseño serán la base de los aspectos metodológicos para desarrollar y poner en escena una secuencia de modelación para la introducción significativa de la función cuadrática (Briceño, 2014). Los experimentos de diseño aportarán al trabajo aquellas acciones para la recopilación de datos y su análisis que permite darle significados variacionales a la función cuadrática desarrollando intencionalmente la práctica de modelación.

Aspectos teóricos: modelación y aspectos variacionales de la función

Reconocemos la modelación como el puente entre la escuela y lo que se hace en comunidades no escolares (Arrieta y Díaz, 2015). Para estos autores la modelación es una práctica que al llevarse a cabo en el aula favorece que el estudiante traiga fenómenos de la vida real y los maneje en el medio escolar, encontrando una conexión entre lo matemático y lo que realiza en el aula de matemáticas. La modelación permitirá la consecución de los conceptos estableciendo una relación estrecha entre el conocimiento —lo real— y lo didáctico. El enseñar matemáticas en el aula de clase usando la modelación como práctica puede dar las herramientas y la motivación suficiente para lograr los objetivos propuestos en los currículos de las instituciones latinoamericanas.

Cordero (2006) comenta que la modelación es, en sí misma, una construcción del conocimiento matemático donde modelar no es solo una herramienta didáctica que ayuda o facilita a construir el concepto de función, sino que es algo más profundo ya que es una práctica que trasciende y que resignifica continuamente a la propia función y los elementos variacionales asociados.

Se está proponiendo una nueva base didáctica para reorganizar y resignificar la matemática escolar ya que interesa no solamente analizar la matemática que interviene en las actividades, los conceptos a aplicar o la relación entre ellos, sino a la práctica como normativa del conocimiento matemático, debido a que esta explica por qué y cómo los seres humanos construimos conocimiento (Cordero, 2005). La naturaleza de dicha explicación es social ya que no se limita a cómo se construyen lógicamente los conceptos, sino a las prácticas desarrolladas intencionalmente por personas en un contexto sociocultural específico. Importa cómo se usa el conocimiento, la manera como se construye, qué razonamientos se asocian y qué clase de significados se comparten.

Considerando la modelación como una práctica desarrollada intencionalmente en las actividades, el estudiante puede establecer una relación estrecha entre el saber científico y el saber escolar junto con las herramientas matemáticas. Arrieta y Díaz (2015) mencionan que la modelación es, entonces, una práctica de articulación de dos entes, donde uno de ellos llamado entidad interventora actúa sobre otro llamado lo entidad a intervenir. La articulación de estos entes da lugar a una nueva entidad que denomina dipolo modélico. Una entidad interventora (una tabla, una ecuación, gráficas cartesianas, trayectorias y otras) actúa sobre otra entidad a intervenir (el fenómeno) para modificarla en una interacción en la que ambas terminan siendo resignificadas.

En el mismo sentido, Galicia (2013) comenta que los dipolos modélicos están conformados por dos polos (las dos entidades) y por corrientes de atracción entre ellos que serán los argumentos, las herramientas, las intenciones y los procedimientos.

El uso de las gráficas para dar nuevos significados a conceptos matemáticos permite establecer una relación armoniosa entre modelación y graficación[1], que puede dar buen provecho para estudios relativos a funciones. El uso de las gráficas es pilar importante en el proceso enseñanza aprendizaje cuando se quiere llevar al medio escolar un concepto a través de la práctica de modelación, como sucede con la función cuadrática. La misma gráfica se usa, por ejemplo, para observar las variaciones que puede sufrir un fenómeno cuando se tiene una variable independiente como el tiempo. Estamos ante una epistemología *sui géneris* en la que la gráfica, y la práctica graficación, existen y son significativas en sí mismas y no sólo a la luz de la noción de función. Permiten además el desarrollo de la argumentación y por consiguiente, la resignificación continua de elementos variacionales alrededor de la noción de función (Suárez, 2014).

En cuanto a los aspectos variacionales de las funciones, Dolores y Guerrero (2004) reportan los resultados de una investigación que explora las concepciones alternativas de profesores y estudiantes de bachillerato acerca del comportamiento variacional de funciones. Para tal exploración se diseñó un cuestionario en el que se usan los sistemas de representación verbal, gráfico y analítico. Al realizar las exploraciones se tuvieron en cuenta concepciones relativas al comportamiento variacional de funciones (para qué x, $f'(x)>0$), al comportamiento variacional y signo simultáneamente (para qué x se cumple que: $f'(x)>0$ y $f(x)<0$) y las relativas a los procesos de reversibilidad (dada $f'(x)$ esbozar f y viceversa). Los resultados muestran que una cantidad significativa de encuestados creen que $f(x)<0$ si su gráfica f está en el semieje negativo de las x; consideran a $f'(x)$ como asociada a un punto y no al comportamiento de $f(x)$; la mayoría se muestra imposibilitado para transferir información variacional de la gráfica de f´ a f.

1 Término disciplinar referido a la práctica relacionada con el uso de gráficas en un sentido social. No se refiere sólo a graficar en el sentido del logro didáctico de representar mediante una gráfica, sino en poder resignificarla continuamente y generar así conocimiento matemático

De la misma manera Díaz (2004) menciona que las representaciones de variación que realizan estudiantes de secundaria pueden ser tanto de naturaleza estática y discreta, como dinámica y continua, constituyendo conocimientos en los que la noción de variación forma parte.

La modelación y los aspectos variacionales establecen un dúo bastante productivo. Briceño (2014) comenta que los aspectos variacionales en la función cuadrática se resignifican a través de la práctica de modelación, porque a través de esta práctica se puede determinar de cómo se pone en juego el conocimiento matemático en forma de herramienta, qué relaciones se utilizan, por qué camino se dirige, para qué del conocimiento. La práctica de modelación lleva al estudiante a que le dé significado, y use los aspectos variacionales que se quieren introducir estableciendo una relación epistemológica entre la modelación y los aspectos variacionales con la construcción del conocimiento matemático.

La investigación

El tomar como fundamento metodológico los experimentos de diseño hace que nuestra propuesta se encamine a analizar aspectos del aula de matemáticas de una manera diferente. Los experimentos de diseño no son tareas de clase, sino que están dentro de un diseño pedagógico para mirar el aula de una manera inteligente y propositiva; se parte de resultados que se obtienen de la investigación permitiendo además desarrollar teoría.

En nuestro caso, el aspecto teórico se refiere a determinar cómo aspectos variacionales (el tiempo como variable independiente, el uso de la gráfica y el uso de tablas) pueden vivir en el aula con los estudiantes para la resignificación de la función cuadrática.

La modelación se asume en el sentido de Arrieta (Arrieta, 2003; Arrieta y Díaz, 2015) como una práctica que permite poner en juego dichos elementos variacionales: se toma una cierta entidad (una gráfica, una tabla de datos) para poder incidir en otra (fenómeno físico). Esta incidencia se va transformando en una articulación significativa en la que el saber matemático toma la forma de herramientas y argumentos que se ponen en juego, y no solo como un conjunto preexistente de conocimientos (fórmulas, expresiones matemáticas) matemáticos que hay que aplicar.

Más allá de crear diseños efectivos para algún aprendizaje, se persigue explicar cómo funciona el diseño instruccional propuesto y cómo se favorece la resignificación de la función cuadrática. Esto, a su vez, permite sugerir formas con las cuales puede ser adaptado a nuevas circunstancias.

Aspectos metodológicos

Fundamentados en los experimentos de diseño se desarrollarán las tres fases planteadas por Cobb y Gravemeijer (2008) y en ellas se mostrarán los procesos y el tratamiento dado a cada una de las secuencias de actividades formuladas. En esta sección se presentarán sólo las fases 1 y 2. La primera es relativa a la preparación y planeación de la experimentación; la segunda a la toma de datos. En la siguiente sección, se presentará la fase 3 que es el análisis de las secuencias.

***Fase 1**. Preparación del experimento.* Dentro de esta fase se encuentran el diseño y planeación de todos aquellos experimentos que forman parte de la investigación.

Cuestionario diagnóstico. Con este cuestionario se buscó indagar qué conocimiento posee el estudiante referente a trayectorias, gráficas, relación distancia-tiempo y tratamiento de situaciones que reflejan la modelación como práctica, además analizar cuáles podrían ser las respuestas ante las situaciones y preguntas propuestas. Esto es coherente con la sugerencia de Cobb et al. (2003) respecto a que en las zonas menos investigadas, el equipo de investigación necesita llevar a cabo un trabajo piloto para documentar estos conocimientos. El cuestionario consta de cinco preguntas y es aplicado a estudiantes de séptimo entre los 11 y 12 años de edad, correspondiente a un grado menor al que se aplica las secuencias 1 y 2 que se mostrarán más adelante. Los estudiantes escogidos pertenecen a la misma institución y a la misma sede.

Diseño de la Secuencia 1 y 2. Se busca desarrollar en forma intencional la modelación en el aula de clase a través de las secuencias que se proponen. Las secuencias diseñadas parten de fenómenos físicos extraídos de la observación diaria donde sin tanto conocimiento formal de conceptos físicos el estudiante puede relacionar y establecer procesos matemáticos para el aprendizaje referente a la función cuadrática. Las secuencias serán el medio por el cual se muestra la intencionalidad de la modelación para que los estudiantes logren establecer relaciones significativas entre gráfica, expresiones algebraicas y tabulaciones, relaciones entre magnitudes variables, relaciones entre diferentes contextos e integre el mundo real al ámbito escolar, use las gráficas y las tablas de manera significativa.

Planeación de la Secuencia 1. Esta secuencia se comienza a planear mirando aquellos fenómenos más cercanos al estudiante o que diariamente los presencian. Esto se logra dialogando con ellos e intercambiando ideas, hasta observar qué fenómenos son bastante conocidos por ellos. Para esta secuencia se escoge el movimiento de un auto desde un punto a otro que disminuye su velocidad paulatinamente hasta parar y regresar al punto de partida.

Inicialmente se piensa introducir la velocidad como magnitud, pero se consideró que podría ocasionar confusión y dificultad en las respuestas a las preguntas. El número preliminar de preguntas es 12, de las cuales se comienzan a unir y a conformar de mejor manera hasta quedarnos con siete preguntas.

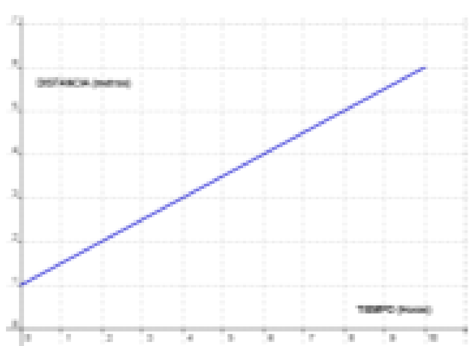
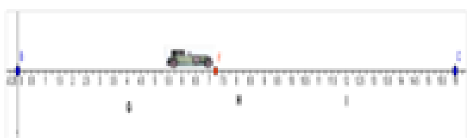
Ya seleccionadas las siete preguntas con las que se forma la actividad de la secuencia, se elige a los estudiantes participantes. La escogencia fue voluntaria y de los que aspiraban se eligieron 12 de ellos al azar para la aplicación. Antes de la aplicación de la actividad de la secuencia se instruyó a los estudiantes seleccionados sobre el uso de un applet del movimiento de ida y regreso del auto como se muestra en la secuencia 1 tabla (1). Se les informó la manera de usarlo, cuándo podían parar o iniciar nuevamente el movimiento. Referente al manejo de geogebra, ya se tenían algunos indicios sobre este, porque en anteriores oportunidades escolares se había trabajado con el software.

Planeación de la Secuencia 2. Teniendo como punto de partida la secuencia 1 y estableciendo aquellos aspectos que no debían ir en el diseño de la secuencia, se trabajó para conformar una actividad que llamara la atención al estudiante y que se tratara de un fenómeno que se pudiera observar cotidianamente. Entonces fluye la idea del fenómeno de lanzamiento vertical de una pelota con todas sus características de desplazamiento y de transcurrir del tiempo. Esto se da cuando se intercambian ideas con los estudiantes. Se comienza diseñando una variedad de preguntas ajustadas al fenómeno, pero que a medida que se trataba el caso y se relacionaba con los objetivos propuestos, estas se iban depurando hasta lograr siete preguntas correspondientes al fenómeno elegido.

Para la aplicación de la secuencia a los estudiantes se mantuvieron los mismos doce seleccionados para la primera secuencia. Se eligieron las herramientas informáticas con las cuales se quería desarrollar la actividad. Se tomó nuevamente geogebra y se adicionaron dos nuevos software como ayuda para simular el movimiento el Modellus y el Tracker-310 de libre adquisición. Investigadores como Cobb et al. (2003) fortalecen esta decisión ya que los nuevos recursos, tales como programas informáticos, pueden ser usados para apoyar la forma prevista de aprendizaje.

En la tabla 1 se muestran de manera condensada las preguntas que conformaron el cuestionario diagnóstico y las secuencias 1 y 2. Esto permite seguir un proceso de ordenamiento y fundamentación entre ellas.

Tabla 1. Preguntas del cuestionario y secuencias

Cuestionario Diagnóstico	Secuencia 1	Secuencia 2
1. De acuerdo con sus conocimientos dibuje una gráfica cualquiera. 2. ¿Qué entiende por una gráfica lineal? Esbócela 3. Un automóvil se mueve en línea recta una distancia de 200m. Dibuje esta trayectoria 4. El mismo auto después debe subir una montaña de 250m y 250 m de bajada. Dibuja esta trayectoria. 5. La gráfica siguiente describe el movimiento de una oruga tomando en cuenta el tiempo y la distancia. Si a usted le muestran la siguiente gráfica y le piden que debe describir con palabras dicho movimiento a sus compañeros que no han visto la gráfica, ¿qué les diría? 	 1. Si dos autos se ponen en movimiento al mismo instante uno va en forma horizontal moviéndose de B-C a C-B y otro a través de una montaña, las distancias que recorren son las mismas y el tiempo transcurrido también es idéntico ¿cómo serían sus trayectorias? Dibújelas. Se quiere llevar los puntos marcados en el movimiento de ida y regreso horizontal (B, G, H, I, C) al movimiento del auto en montaña. Discuta con sus compañeros dónde los localizaría. Márquelos 2. Tomando el tramo B-G y el I-C de ida, al comparar los tiempos gastados en esos tramos ¿cómo serían, y por qué? 3. Si tomo esos mismos tramos pero de regreso C-I y G-B ¿Cómo sería la comparación de los tiempos con respecto al movimiento de ida? 4. Si le pidieran llevar el movimiento del auto F a una gráfica teniendo como magnitudes el tiempo y la distancia ¿cómo lo haría? Esbócela 5. Compare la gráfica que obtuvo con la de otros compañeros ¿qué diferencias encuentras? 6. Tomando intervalos de tiempo pequeños en el movimiento que hace el auto de ida y regreso medir las distancias recorridas, y plasmarlas en una tabla. ¿Cómo cree que es la relación de los datos numéricos del tiempo referente a la altura? Comente 7. ¿Cómo cree que sería la gráfica del movimiento teniendo en cuenta la situación del numeral anterior? ¿Tiene alguna similitud con la esbozada anteriormente por usted? Compare la gráfica y de su opinión.	1. Realice los siguientes lanzamientos con una pelota: un lanzamiento vertical y uno que forme una curva. Suponiendo que el tiempo en caer de los movimientos es igual y llegan a la misma altura. Discuta con sus compañeros Tomando unos puntos cualesquiera en el lanzamiento vertical, transportarlos al otro movimiento ¿dónde los ubicaría? Dibuja en una hoja las dos trayectorias y localiza los puntos. 2. ¿Cómo llevaría a una gráfica el movimiento que hace la pelota al lanzarla verticalmente desde el punto de partida (P) hasta que llega nuevamente a su inicio? 3. Discutir con sus compañeros sobre el lanzamiento de la pelota hacia arriba un instante antes de llegar la pelota al punto donde se regresa y ese mismo intervalo de tiempo después que se regresa ¿cómo serían las alturas en esos puntos y qué pasa con el tiempo transcurrido? ¿Por qué sucede eso? 4. Si tomamos un intervalo pequeño de tiempo después del lanzamiento y ese mismo intervalo de tiempo antes de caer, ¿quépiensasobrelasalturasenesosintervalosyaquésedebe? Para realizar la siguiente actividad los estudiantes toman una pelota y realizan un lanzamiento vertical hacia arriba. Con anterioridad se han marcado en una regleta que se coloca valores numéricos con el propósito de medir las alturas en un determinado tiempo. 5. Tomando intervalos de tiempo pequeños, medir las alturas correspondientes y mostrarlas en una tabla. Deben ser más de diez tomas. ¿cómo cree que es la relación de los datos numéricos del tiempo referente a la altura? Comente 6. ¿Cómo cree que sería la gráfica del movimiento teniendo en cuenta la situación del numeral anterior? Tiene alguna similitud con la esbozada anteriormente en el numeral 2? Compara su gráfica con la obtenida por otros grupos y de su opinión 7. Si le pidieran comprobar que el modelo gráfico que se obtuvo es el indicado para el fenómeno mostrado de lanzamiento vertical ¿qué debe hacer?

Fase 2. *Toma de datos.* En esta fase mostraremos algunas respuestas ofrecidas por los estudiantes en el desarrollo de las actividades que se dieron en las secuencias.

Secuencia 1. Para la toma de datos de las dos secuencias se tiene en cuenta lo expuesto por los estudiantes en forma escrita, como también las acciones a través de videos y sus diálogos en los audios. Entre las acciones captadas por los videos se puede mencionar el movimiento de las manos para indicar desplazamiento y mostrar el movimiento que realiza el auto; el uso de las manos daba a entender lo que conocían sobre el movimiento y trataban de representarlo con ellas. Las expresiones gestuales que intercambiaban entre ellos les permitían explicar mejor lo que querían comunicar (figura 1).

Figura 1. Gestos con sus manos para indicar el movimiento del auto

Podemos evidenciar la participación activa de los estudiantes en la solución de la pregunta propuesta pues tomaban las reglas y medían en la pantalla del computador las distancias (figura 2).

Figura 2. Tomando mediciones

Al realizar la gráfica un grupo no utiliza el primer cuadrante como generalmente se hace para realizar la gráfica (conocimiento institucionalizado), sino que toma el segundo cuadrante y establece las magnitudes en los ejes. Lo hacen sin preguntarse si lo están haciendo bien o no, simplemente lo hacen espontáneamente. Sin embargo, sí queda establecida una relación entre el tiempo y la distancia que es finalmente un uso significativo de la gráfica (figura 3).

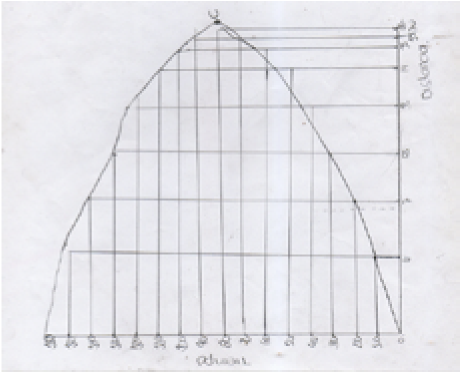


Figura 3. Gráfica en el segundo cuadrante

Secuencia 2. El movimiento de las manos les permite mostrar la trayectoria de la pelota cuando sube y baja y para reconocer que ese movimiento se representa en una gráfica en forma curva (figura 4).

Figura 4. Movimientos de las manos realizada por los estudiantes

Cuando se pide comparar la trayectoria del lanzamiento vertical con la pelota lanzada con un ángulo inicial y llevar los puntos de una a la otra, algunos grupos tienen dificultad con la pregunta y realizan dibujos hasta encontrar la convencional (figura 5).

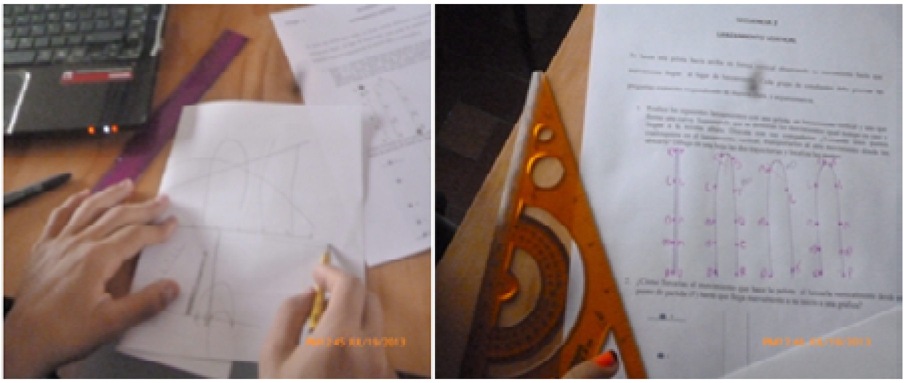


Figura 5. Pruebas realizadas por los estudiantes para obtener la trayectoria

Referente al uso de los ejes cartesianos un grupo no toma el tiempo en el eje horizontal (forma institucionalizada) y la altura en el vertical sino al contrario, pero resulta relevante que explicitan la relación entre altura-tiempo mediante marcas sobre el dibujo (primera gráfica figura 9).

Usan las escuadras para tomar medidas directamente del applet presentado para dar respuesta a las preguntas. Estos datos les sirven de guía y punto de partida para responder las preguntas sobre el movimiento (figura 6).

Figura 6. Uso de implementos para tomar medidas

Uno de los grupos dibuja las gráficas de subida y bajada de forma separada. Toman el movimiento de subida independiente al de bajada (figura 7).

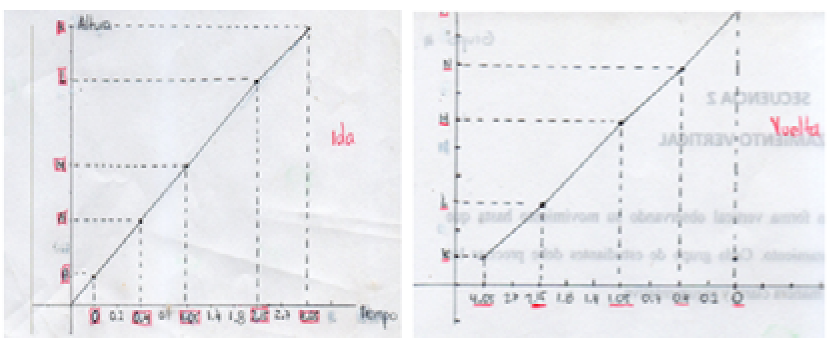


Figura 7. Gráficas de ida y de vuelta

Dos grupos no grafican en el primer cuadrante como se ha institucionalizado, sino que lo hacen en el segundo cuadrante pero manteniendo las magnitudes de tiempo en la horizontal y la altura en la vertical sin preguntarse por qué lo hacen (figura 8).

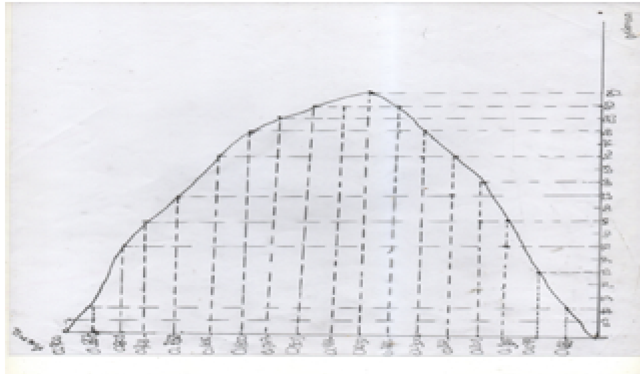


Figura 8. Gráfica en el segundo cuadrante

Análisis de las secuencias

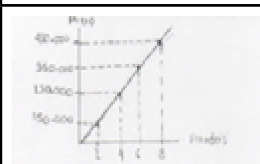
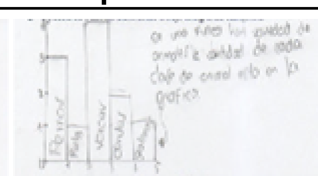
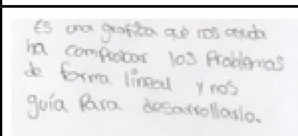
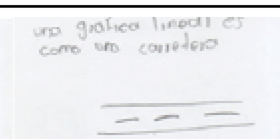
Este apartado se fundamenta en el análisis retrospectivo que se le hace a cada una de las secuencias de acuerdo a la fase 3. La información que aquí se detalla ofrece elementos hacia la resignificación de la función cuadrática.

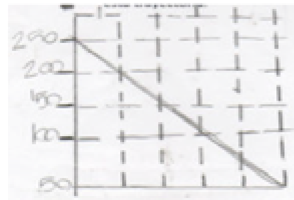
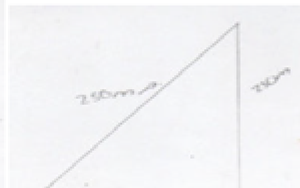
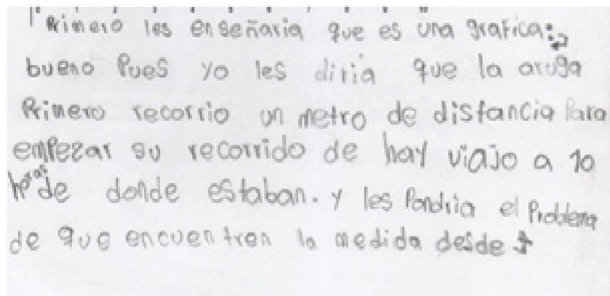
Cuestionario diagnóstico

El cuestionario diagnóstico se concibió con el fin de aplicarlo a estudiantes de un nivel inferior al que se aplican las secuencias y el propósito es conocer aquello que los estudiantes saben sobre trayectoria, gráficas, relación distancia-tiempo. Ellos demostraron a través de las respuestas que tienen conocimiento sobre lo que es una gráfica manifestando que presenta dos ejes y que, en ella se establecen relaciones de variables y la diferencian de una trayectoria. También podemos analizar que se presentan algunas falencias como el de relacionar movimientos con un comportamiento lineal sin serlo o establecer que una trayectoria es lo mismo que una gráfica. Es a partir de lo obtenido en el cuestionario diagnóstico que se formulan las secuencias.

En la tabla 2 se mostrará las preguntas del cuestionario diagnóstico relacionada con una respuesta que dan los estudiantes.

Tabla 2. Pregunta y algunas respuestas del cuestionario diagnóstico

Pregunta	Respuesta
1. De acuerdo con sus conocimientos dibuje una gráfica cualquiera	 
2. ¿Qué entiende por una gráfica lineal? Esbócela	 

3. Un automóvil se mueve en línea recta una distancia de 200m. Dibuje esta trayectoria	
4. El mismo auto después debe subir una montaña de 250m y 250 m de bajada. Dibuja esta trayectoria	 
5. La gráfica siguiente describe el movimiento de una oruga tomando en cuenta el tiempo y la distancia. Si a usted le muestran la siguiente gráfica y le piden que debe describir con palabras dicho movimiento a sus compañeros que no han visto la gráfica, ¿qué les diría?	 Primero les enseñaria que es una grafica: bueno pues yo les diria que la oruga primero recorrio un metro de distancia para empezar su recorrido de hay viajo a 10 mts de donde estaban. y les pondria el problema de que encuentren la medida desde

Secuencias. El análisis de las secuencia se realiza a través de tres aspectos variacionales relativos a la función cuadrática. El tiempo como variable independiente, el uso de la gráfica: intervalos y puntos clave y el uso de tablas.

El tiempo como variable independiente. En su mayoría los estudiantes reconocen que el tiempo es una magnitud que siempre es positiva y no tiene regreso, siempre va aumentado. Esto se puede mostrar en las dos gráficas de la figura 9 que corresponden a la secuencia 2. En la respuesta de la pregunta cinco de esta misma secuencia 2 en la (figura 9), cuando se les pide que hallen una relación entre los datos numéricos, toman el tiempo como algo progresivo mientras la otra variable puede aumentar o disminuir. Algunos al graficar no sitúan el tiempo en el eje horizontal como se observa en la primera gráfica de la figura 9 pues pareciera que no les resulta relevante el establecer la variable el tiempo en el eje horizontal, sino solo establecer la relación altura tiempo. Esto contrasta con situar al tiempo en el eje horizontal que el estudiante acepta como algo que se debe aprender porque así lo establece el profesor o el sistema didáctico en general ya que es una noción que en la mayoría de currículos e instituciones se implanta. Esto se evidencia cuando el estudiante toma el tiempo en cualquier eje de coordenadas. A través del análisis del tiempo se puede establecer que los estudiantes con sus acciones sí reconocen un antes y un después como se observa en las gráficas, además de una relación entre los datos; es así que el estudiante pasa del conocimiento de que todos los fenómenos se representan como una línea recta a que haya otro tipo de comportamientos gráficos.

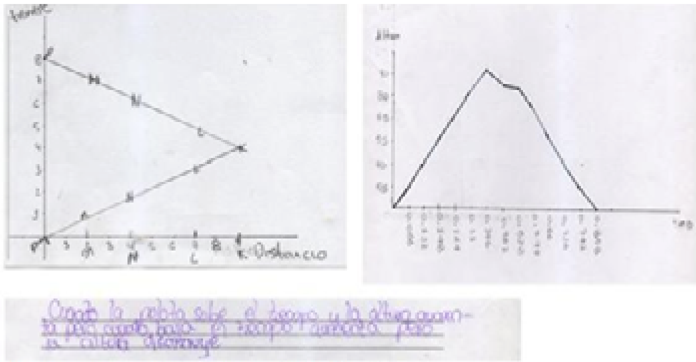


Figura 9. El tiempo como variable

El siguiente diálogo realizado por estudiantes evidencia cómo consideran al tiempo: una distancia que puede aumentar y en otras regresar.

> *I: ¿Tomaron el movimiento bajando y subiendo?*
>
> *E2: ¿ Ah tocaba bajando también?*
>
> *E1: Hagamos otra gráfica pero con el regreso*
>
> *I: ¿Por qué no la hacen en la misma gráfica?*
>
> *E1: Sí*
>
> E2: Según lo que entendí el tiempo aumenta pero cuando se regresa el tiempo va retrocediendo

Uso de la gráfica: intervalos y puntos clave. El estudiante para responder las preguntas propuestas usa la gráfica identificando puntos clave o significativos, ya sea numéricamente o posicionales para hallar las coordenadas de intersección.

El estudiante usa la gráfica resignificando puntos clave cuando en la figura 10 establece puntos bidimensionales en un plano cartesiano. Podemos ver que las líneas punteadas o continuas asocian cada punto con un valor en el tiempo (eje *x*) y uno en la distancia (eje *y*). En esta doble asociación está trabajando con puntos coordenados, los cuales toman la forma de puntos clave cuando consideramos cómo se usa la gráfica. Sin embargo es de notar que en la primera gráfica de la figura 10 los puntos del eje no están dibujados de manera proporcional ni secuencial aunque sí lo están para el tiempo. En esta primera gráfica (pregunta 7, secuencia 1) puede verse también cómo estos puntos clave (un punto en el plano donde las rectas punteadas se intersecan) le dan forma a la gráfica y además y le permite marcar lugares que indican inflexiones.

En la segunda gráfica de la figura 10 vemos que el estudiante pareciera estar trabajando en lo que institucionalmente pudiera ser el segundo cuadrante; sin embargo no es así porque los valores del eje *x* no son negativos. Entonces podemos decir que el estudiante indiferentemente toma para graficar cualquier cuadrante mostrando que su foco de atención es representar una relación: es un uso de la gráfica acorde a lo que tiene significado para el estudiante.

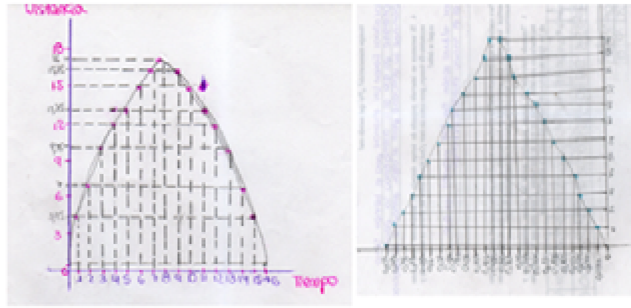


Figura 10. Resignificando puntos clave

En la gráfica de la figura 11 extraída de la secuencia 2 pregunta 7, se observa nuevamente que el uso de los cuadrantes para el estudiante es algo no trascendental y por eso realiza la gráfica en el llamado segundo cuadrante de acuerdo con lo establecido institucionalmente o por el discurso escolar del profesor. Según lo mostrado por las gráficas desarrolladas por los estudiantes se conservan los valores del eje (x) positivos, de la manera como los obtuvo de la observación del fenómeno sin interesar que la progresión va hacia la izquierda. Parece ser que ante esta situación el estudiante resignifica intervalos y puntos clave de acuerdo con el posicionamiento de las parejas ordenadas sin interesar el cuadrante.

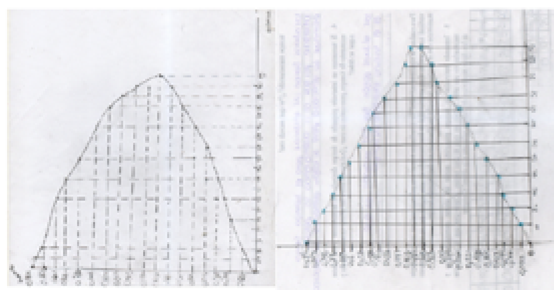


Figura 11. Uso de cuadrantes

El estudiante cuando compara las gráficas reconoce que los puntos clave lo ayudan a romper con la linealidad en los fenómenos que se presentan, reconociendo que no todos los fenómenos tienen comportamiento lineal. Esto se puede observar en las gráficas de la figura (12), donde el estudiante compara la gráfica primera con la segunda reconociendo que en la primera no toma el movimiento de regreso. En la segunda gráfica la posición de los puntos le da la forma de la gráfica cartesiana del fenómeno de movimiento. La primera gráfica hace referencia a la secuencia (1) pregunta 4 y la segunda gráfica corresponde a la misma secuencia pregunta 7.

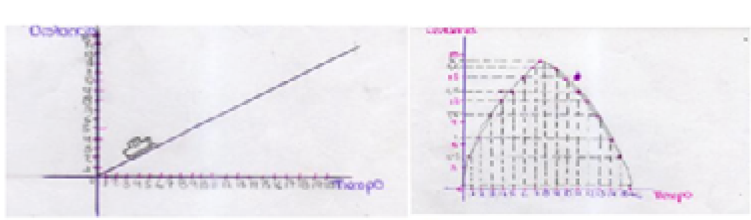


Figura 12. Comparación de gráficas

I: ¿Por qué la gráfica que anteriormente ustedes dibujaron creyeron que era de esa manera y ahora aparece de otra?

E1: En la primera nos da una recta

I: ¿A qué se debe eso?

E1: Porque no tomamos el regreso

E3: Ah ya sé

E2: A lo que retrocede, la distancia

E3: Sigue siendo la misma

E3: Vuelve a recorrer la misma distancia, pero con tiempo aumentando

Uso de las tablas. El estudiante resignifica la función cuadrática por medio del aspecto variacional de las secuencias numéricas en la tabla cuando establece intervalos iguales o desiguales de tiempo y determina su respectiva pareja, cuando es capaz de generar unos datos y localizarlos de alguna manera en una gráfica, cuando en la misma tabla puede establecer relaciones tiempo-distancia o tiempo-altura y las dos tablas manifiestan estas relaciones. En la primera tabla (figura 13 secuencia 1 pregunta 6) se establecen los valores de tiempo secuenciados y para cada uno de ellos halla el valor correspondiente de la otra variable. En la segunda tabla correspondiente (secuencia 2 pregunta 5) establece una secuencia para el tiempo y enumera cada relación tiempo-altura, mientras que en la primera tabla como se muestra establece puntos de inflexión como el punto bidimensional donde sucede el regreso.

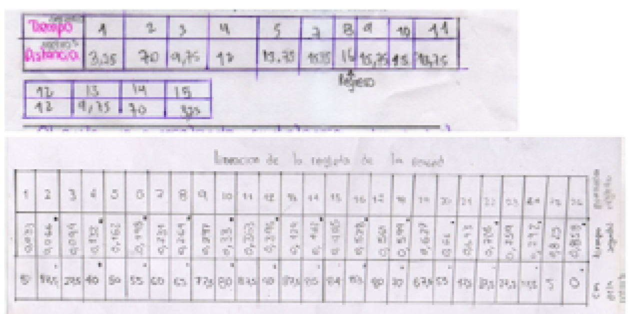


Figura 13. Secuencias numéricas en las tablas

Conclusiones

A través del desarrollo de la investigación podemos reconocer que la metodología de los experimentos de diseño permitió que se recopilaran datos, argumentaciones procedentes de contextos naturales, se abordaron aspectos relativos a la variación y al uso de las gráficas de una función. En particular, sólo se abordó cómo se usa el tiempo como variable independiente a partir de un fenómeno y el uso de las gráficas y tablas. La naturaleza cuadrática de la función sólo se retomó a través de la forma de la gráfica y su relación con el tipo de fenómeno trabajado. En ese mismo sentido, la variación de las tablas pudo ser trabajada a través de cierto uso en las gráficas. Fue evidente cómo el tipo de actividades presentadas hasta ahora no permiten entrar a una discusión sobre el tipo de variación presente en esta articulación fenómeno-gráfica-tabla.

Lo anterior pudiera ser una evidencia de que no es suficiente una articulación de registros para darle significado a la variación particular de las funciones. Así, dada dicha articulación y considerando los usos particulares de cada registro en ellas, es factible y necesario proponer intencionalmente actividades que sigan poniendo en juego la práctica de modelación.

La metodología elegida permite que la intervención del investigador dentro del desarrollo investigativo motive una interacción directa entre los estudiantes, para así despertar esa dinámica entre ellos. Además, permitió reconocer las posturas de los estudiantes en las secuencias expuestas: los gestos, movimientos, acciones, intervenciones y proposiciones que realizaron los estudiantes fueron captado en videos y audios, siendo esto el complemento necesario que se tuvo en cuenta en el análisis de resultados.

Los experimentos de diseño son una ayuda para los investigadores, de forma que no solo es valioso lo que el estudiante plasma en un escrito, sino que además sus relaciones con el medio y con sus semejantes, sus formas de expresar y de proponer brindan respuestas a algunos interrogantes de la investigación no observables en el discurso escolar cotidiano. Así, podemos creer que estableciendo el investigador-profesor una interacción con el fenómeno a través de la práctica de modelar y de experimentos de diseño, podemos facilitar el análisis de los datos y ayudar a reconocer las diferentes posiciones de los estudiantes en las actividades propuestas.

La modelación como práctica quiere relacionar el conocimiento científico (trayectorias visibles a la imaginación) con el conocimiento escolar (el tiempo como variable independiente) y la aplicación de los experimentos de diseño como metodología mostró resultados como los siguientes: el estudiante en algunos casos toma el tiempo como una distancia, en otras toma el tiempo en el eje vertical, ante esto es recomendable reconocer y realizar más investigación al respecto, los significados que pudieran generarse cuando se tome el tiempo no como variable independiente como nos lo muestran el currículo sino como una variable cualquiera.

El uso de gráficas a través de intervalos y reconociendo puntos clave permitió a los estudiantes resignificar el hecho de que no todos los fenómenos tienen una línea recta como gráfica. Los puntos clave permiten al estudiante visualizar cambios y además con estos puntos representar el comportamiento curvo del fenómeno: ser capaces de manejar y argumentar, con este comportamiento abre significados para discutir la variación cuadrática.

Los intervalos en una gráfica no solamente los usan para unir puntos, sino además para correlacionar el tiempo con la distancia o la altura a través de la cuadrícula, para establecer parejas ordenadas y llevarlas a una tabla, además los intervalos son ayuda para que el estudiante reconozca los cambios cualitativos (arriba, abajo, regreso, derecha, izquierda, antes, después) y cuantitativos (valores numéricos) que suceden en el movimiento.

Consideramos que lo anterior da una base de significados a través del comportamiento de las gráficas y la articulación ya mencionada con las tablas y el fenómeno que permitiría una discusión posterior —a su vez más rica y significativa— hacia otros aspectos variacionales particulares de la función cuadrática.

Referencias

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula* (tesis de doctorado no publicada). DME, Cinvestav-IPN, México.

Arrieta, J. y Díaz, L. (2013) Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, 18*(1) 19-48.

Baumgartner, E., Bell, P., Brophy, J., Hoadley, C., His, S., Joseph, D., Orrill, C., Puntambekar, S., Sandoval, W., Tabak, I. (2003). Design-Based Research: An Emerging Paradigm for Educational Inquiry. *Journal: Educational Researcher*, *32 (1*), 5-8.

Briceño, O. (2014). *Una secuencia de modelación para la introducción significativa de la función cuadrática* (tesis de maestría no publicada). Cicata: México.

Cobb, P. & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. In A.E. Kelly, R.A. Lesh y J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education. Innovations in Science, Technology,Engineering and Mathematics Learning and Teaching* (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher, 32*(1), 9–13

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías de conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 8(3), 365-386.

DBRC (The Design Based Research Collective) (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher*, *32*(1), 5-8.

Díaz, E. (2004). Construyendo relaciones benéficas entre imaginarios culturales y aprendizajes matemáticos. . En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 17*, 10-20. México: Clame.

Dolores, C. Guerrero, L. (2004). Concepciones alternativas que, referentes al comportamiento variacional de funciones, manifiestan profesores y estudiantes de bachillerato. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17*, 101-107. México: Clame.

Galicia, A. (2013). *Desplazamiento de la práctica de diluciones desde la comunidad de ingenieros bioquímicos a la escuela* (tesis de doctorado no publicada). Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Levin, J. R. & O'Donnell, A. M. (1999). What to do about educational research's credibility gaps? *Issues in Education*, *5*(2), 177–229.

Reimann, P. (2011). Design-based research. In L. Markauskaite et al. (eds.) *Methodological choice and design,* 37-56. Springer.

Suárez, L. (2014). *Modelación-Graficación para la Matemática Escolar*. México: Díaz de Santos.