REVISTA VIRTUAL
Universidad Católica del Norte
CATÓLICA DEL NORTE Fundación Universitaria Pioneros en educación virtual
http://revistavirtual.ucn.edu.co
No. 45| Mayo - Agosto, 2015
ISSN-0124-5821 (en línea)

Cómo citar el artículo
Burbano Pantoja, V.M.; Pinto Sosa, J. E. & Valdivieso Miranda, M. A. (2015). Formas de usar la simulación como un recurso didáctico. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 45, 16-37. Recuperado de http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/653/1186

Formas de usar la simulación como un recurso didáctico*

Some Ways of Using Simulation as a Pedagogical Resource

Quelques manières d'utiliser la simulation comme une ressource pédagogique

* Este artículo es uno de los resultados del macroproyecto de investigación: "Simulación con modelos aleatorios y no aleatorios", desarrollado por el grupo de investigación GAMMA-GICI en la Línea de Investigación de Educación Estadística, Facultad de Ciencias de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Fecha de Inicio: Junio de 2011, fecha de culminación: Junio de 2013.

Indexada Publindex-Colciencias (B), Latindex, EBSCO InformationServices,Redalyc, Dialnet, DOAJ, Actualidad Iberoamericana, Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa (IRESIE) de la Universidad Autónoma de México.

Víctor Miguel Ángel Burbano Pantoja
Licenciado en Matemáticas
Especialista en computación para la docencia
Especialista en pedagogía para el desarrollo del aprendizaje autónomo
Magíster en Ciencias-Estadística
Candidato a doctor en Ciencias de la Educación
Docente de tiempo completo en la Escuela de matemáticas y estadística Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
Coordinador Grupo de Investigación GICI
victorburbanop@yahoo.es, victor.burbano@uptc.edu.co

Jesús Enrique Pinto Sosa
Licenciado en Educación, especialidad en matemáticas
Maestría en Educación Superior
Doctorado en Educación Matemática Universidad de Salamanca (España)
Profesor investigador de tiempo completo
Facultad de Educación Universidad Autónoma de Yucatán, México
psosa@uady.mx, jesuspintososa@gamil.com

Margoth Adriana Valdivieso Miranda
Licenciada en Matemáticas
Magíster en Ciencias-Estadística
Docente de tiempo completo Escuela de Matemáticas y Estadística
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
mavaldiviesom@yahoo.com, margoth.valdivieso@uptc.edu.co

Recibido:	6 de diciembre de 2014
Evaluado:	1 de abril de 2015
Aprobado:	10 de abril de 2015
Tipo de artículo:	Resultado de investigación científica y tecnológica

Resumen

Este artículo, resultado de investigación en el campo de la educación estadística, se focaliza en explorar si el desarrollo de algunos procesos de simulación despierta el interés de los estudiantes y se constituye en un recurso didáctico para estimar probabilidades y valores de cierto tipo de variables aleatorias. Los métodos utilizados se basaron en procesos intuitivos y formales respectivamente, ambos incluyeron la simulación por computador. En el primero participaron 20 estudiantes del grado once de una institución educativa de Tunja-Boyacá, Colombia, con edades entre los 15 y 18 años, y en el segundo 16 estudiantes universitarios del mismo lugar con edad superior a 19 años. Los resultados permitieron concluir que los procesos de simulación motivan a los estudiantes constituyéndose en un recurso importante que ayuda a confrontar sus intuiciones con las estimaciones obtenidas al modelar fenómenos aleatorios específicos.

Palabras clave

Formación de profesores, Probabilidad, Procesos intuitivos y formales, Recurso didáctico, Simulación.

Abstract

This article is derived from a research conducted and contextualized within the field of statistical education, it focuses on exploring whether the development of some simulation processes increases the interest of students and constitutes itself as a teaching resource for estimating probabilities and the values of certain types of random variables. The methods used were based on intuitive and formal processes respectively, both included computer simulation. In the first method participated 20 high school final-year students of an educational institution in Tunja-Boyacá, Colombia, aged between 15 and 18 years and in the second method participated 16 university students from the same place being more than 19 years old. The results allowed to conclude that simulation processes motivate students becoming an important resource which help them to confront their intuitions regarding the estimations obtained by modeling specific random phenomena.

Keywords

Intuitive and formal processes, Probability, Pedagogical resource, Simulation, Training of teachers.

Résumé

Cet article est le résultat de une recherche dans le domaine de l'éducation statistique, il est focalisé dans explorer si le développement de quelques processus de simulation capturent l'intérêt des étudiantes, et se transforment dans un ressource pédagogique pour estimer des probabilités et les valeurs de quelques types de variables aléatoires. Les méthodes utilises se basent sur processus intuitifs et formels respectivement, les deux ont inclus la simulation par ordinateur. Dans la première méthode ont participé 20 étudiantes de la dernière année d'éducation secondaire d'une institution éducative de Tunja-Boyacá, dans la Colombie, avec des âges entre 15 et 18 ans, et dans la seconde méthode ont participé 16 étudiantes universitaires du même endroit qui ont plus de 19 ans. Les résultats on permet de conclure que les processus de simulation stimulent aux étudiants en se transformant dans une ressource important qui aide à confronter leurs intuitions avec les estimations obtenus avec la modélisation de phénomènes aléatoires spécifiques.

Mots-clés

Education des professeurs, probabilité, processus intuitifs et formels, ressource pédagogique, simulation.

Introducción

La búsqueda de explicaciones para fenómenos que suceden de forma aleatoria en la naturaleza o de manera inesperada e incierta en la sociedad, ha llevado al ser humano a la necesidad de utilizar mecanismos concretos o abstractos que permitan cuantificar de manera aproximada la posibilidad de que un evento específico ocurra. Una herramienta abstracta para tal fin es la probabilidad; esta permite estudiar la medida numérica de la posibilidad de que un suceso ocurra (Valdivieso, 2010). Para ello, es posible usar métodos intuitivos o métodos formales. Los primeros se basan en las intuiciones y creencias de las personas (Batanero, 2005) y los segundos en objetos matemáticos formales como espacios de probabilidad y variables aleatorias que bajo ciertas reglas permiten calcular la posibilidad de que un evento suceda.

Para modelar situaciones reales en las cuales exista presencia del azar, lo aleatorio o la incertidumbre es conveniente utilizar el pensamiento aleatorio o el razonamiento probabilístico y buscar procedimientos que permitan de manera razonable emular estas situaciones; un recurso que posibilita la obtención de estimaciones o aproximaciones de aquello que puede estar sucediendo en una situación real es la simulación. Aunque este concepto ha sido utilizado para modelar situaciones aleatorias y no aleatorias, aquí se lo consideró bajo circunstancias en las que se tiene presencia de aleatoriedad o incertidumbre (Liu, 2014). Además, para verificar que con frecuencia nuestras intuiciones sobre el azar nos engañan es razonable experimentar con la simulación (Batanero, Godino & Roa, 2004).

El uso de la simulación como un recurso didáctico puede despertar el interés e incrementar la motivación de los estudiantes para el aprendizaje de temas relacionados con la probabilidad. De acuerdo con Piaget e Inhelder (1951), Fischbein (1975), Fischbein y Schnarch (1997), la enseñanza de la probabilidad ha de empezar desde la infancia por medio de la manipulación de elementos concretos como dados, monedas, ruletas y de sucesos o hechos cotidianos, como la implementación de algunos experimentos de simulación que involucren la predicción de algunos resultados posibles. No obstante, hay que tener presente que los conceptos relacionados con la probabilidad evolucionan con la edad; por eso, se ha de hacer una intervención didáctica adecuada para no generar sesgos y concepciones erróneas en los estudiantes. En el caso de la simulación de valores de variables aleatorias continuas, se aconseja realizarla después de aprender los aspectos teóricos correspondientes a los modelos de probabilidad continuos en la etapa de las operaciones formales.

Con base en lo anterior, el propósito de esta investigación consistió en explorar si el desarrollo de algunos procesos de simulación efectivamente despierta el interés y aumenta la motivación de los estudiantes para estimar probabilidades y valores de cierto tipo de variables aleatorias. Para ello, se utilizó la simulación desde un nivel elemental basado en la intuición para el caso de la estimación de probabilidades y un nivel más avanzado caracterizado por la formalidad, la axiomatización y la implementación de algoritmos para la simulación de valores de variables aleatorias. En los dos casos, se recurrió al empleo del computador. En el nivel elemental se usa un software disponible en Internet[1] y en el nivel avanzado el software libre **R**[2].

Para el logro de este propósito, inicialmente se presentan algunos elementos conceptuales, luego se desarrollan dos procesos de simulación: uno tendiente a obtener estimaciones sobre la probabilidad teórica del experimento de girar la pluma de una ruleta marcada en seis partes iguales con colores distintos (ruleta justa) y obtener el color rojo como resultado; el otro para obtener estimaciones del promedio o media en el modelado de un problema real por medio de una distribución uniforme. Cada uno de los procesos constituye un conjunto de procedimientos a desarrollar por parte de los estudiantes en aulas de clase correspondientes al grado once de la educación media colombiana (entre 15 y 19 años de edad) y al tercer semestre del nivel universitario respectivamente (de 19 años en adelante).

En el primer proceso se trabaja bajo el concepto de equiprobabilidad y de la concepción frecuencial para estimar probabilidades (Alexander y Kelly, 1999; Mises, 1952). En el segundo se hace simulación de valores de una variable aleatoria con distribución uniforme en un intervalo dado (Burbano, Valdivieso y Salcedo, 2014). Finalmente, se obtiene los resultados, se realiza un análisis de información incluyendo la discusión y con base en ellos se obtienen las conclusiones.

Elementos del marco teórico

A continuación se definen los conceptos básicos que soportan la investigación: intuición, simulación, número aleatorio y la noción de lo aleatorio, y recurso didáctico. Asimismo, se establecen dos maneras de utilizar la simulación en el salón de clases.

1. Perteneciente a la NVLM (*National Library of Virtual Manipulatives*, por sus iniciales en inglés), software disponible en la dirección electrónica http://nvlm.usu.edu/es/nav/vlibrary.html; el software para la presente investigación se obtuvo a través de una prueba beta gratuita y disponible en Internet.

2. Es un entorno informático estadístico que incluye herramientas de análisis de datos y generación de gráficas. Es software libre y funciona bajo Windows, MAC OS y Linux (ver http://osluz.unizar.es/proyectos/r)

Conceptos básicos

Según el diccionario filosófico de Rosental (2005) la *intuición* es la facultad de conocer de modo inmediato la verdad sin previo razonamiento lógico. La Real Academia Española la define como facultad de comprender las cosas instantáneamente, sin necesidad de razonamiento. Para el matemático y filósofo Descartes puede entenderse que, la forma deductiva de la demostración se basa en axiomas, pero que estos, llegan a conocerse de modo intuitivo, sin demostración ajena. Al contrario del logicismo, para el intuicionismo las entidades abstractas[3] solo se admiten si hubieran sido elaboradas por el hombre, dentro de la matemática puede entenderse como la actividad mental que consiste en efectuar un constructo después de otro, en un encadenamiento (Jiménez, 2005).

En concordancia con Fischbein (1975) las intuiciones son procesos cognitivos que intervienen directamente en las acciones prácticas o mentales caracterizadas por la inmediatez, globalidad, capacidad exploratoria, estructurabilidad y autoevidencia. Diversas intuiciones son propias de las primeras experiencias del niño para acercarse a un concepto matemático elemental y se relacionan entre sí, formando estructuras de razonamiento. Batanero (2001) recomienda desarrollar proyectos de aula con la finalidad de hacer reflexionar al estudiante sobre el hecho de que nuestras intuiciones sobre el azar nos engañan con frecuencia, pero que son propias de las primeras experiencias del niño para acercarse a un concepto matemático elemental (Piaget e Inhelder, 1951).

La Real Academia Española define “simular” como representar algo, fingiendo o imitando lo que no es, haciendo referencia a una situación, hecho o fenómeno que se realiza o ejecuta en un contexto controlado, manipulado o no en condiciones naturales o reales. De este modo, intuitivamente, el concepto de *simulación* hace referencia a emular algunos fenómenos que ocurren de forma aleatoria en la naturaleza o en la sociedad. Asimismo, puede entenderse como emulación o imitación de situaciones reales, en las que haya presencia del azar, de incertidumbre, de riesgo o la necesidad de experimentación (Pantoja, 2014). Por ejemplo, si se requiere simular el evento de que el “el estudiante Juan presenciará un accidente de cualquier tipo en el trayecto de retorno a casa” podría lanzar una moneda al aire y hacer corresponder el sello con la posibilidad de que suceda el accidente y la cara con la posibilidad de que no suceda. Formalmente, Churchman (1973) sostiene que en un sistema: “ simula a si: y son sistemas formales, se considera como un sistema real, se toma como una aproximación de , el modelo con sus reglas de validez no está exento de error”.

En las ideas de Churchman, la simulación es el arte de construir *modelos* para analizar el comportamiento de un sistema real. Un modelo puede corresponder a una representación de un sistema de interés a través de elementos concretos o abstractos. Un gran número de simulaciones se realizan con base en modelos matemáticos de carácter probabilístico o determinístico (no aleatorio). La naturaleza del sistema a estudiar usualmente indica cual es el modelo más apropiado para su análisis y emulación (Blanco, 2004). Cuando el modelo pertinente es el probabilístico, resulta conveniente considerar una o varias variables aleatorias que permitan describir, inferir o predecir lo que puede estar ocurriendo en el sistema objeto de simulación.

3 El término abstractas está referido en el contexto de la matemática.

Siguiendo las ideas expuestas por Naylor, Balintfy y Chu (1977), Papuolis (1991), Azarang (1996), Ross (1999) y Ríos, Ríos y Jiménez (2000) la simulación por computador tuvo su origen en la década de los años cuarenta del siglo XX cuando Turing inventó su máquina ideal que funcionaba perfectamente en el papel y emulaba a la computadora de ahora (Turing, 1950). Desde entonces, su desarrollo ha alcanzado niveles inimaginables, así por ejemplo, usando el método de Montecarlo y el computador fue posible imitar las explosiones nucleares trabajando sobre modelos matemáticos bastante sofisticados (Gentle, 1998). Hoy, la simulación tiene infinidad de aplicaciones en distintos campos del saber humano. Usualmente, la simulación implica usar técnicas numéricas para conducir experimentos por medio de un computador digital; en este caso es conveniente utilizar cierto tipo de modelos matemáticos y lógicos que describan el comportamiento del sistema, usando para ello números aleatorios o técnicas numéricas (Burbano, Valdivieso & Salcedo, 2014).

Para realizar procesos de simulación por computador, la base fundamental son los denominados números aleatorios. Estos son números que se comportan de manera caprichosa como valores de variables aleatorias, de forma similar a como se pudieran comportar los fenómenos naturales no controlables. Se han ideado diversos métodos tendientes a obtener secuencias de números que puedan considerarse como aleatorios; inicialmente se generaron números aleatorios usando métodos manuales como ruletas, el método de la mitad del cuadrado y métodos basados en congruencias lineales, entre otros. Hoy se utilizan métodos computacionales para generar números aleatorios (Law y Kelton, 1991).

Según Godino, Batanero y Cañizares (1987), la noción de lo aleatorio se ha asociado con las distintas concepciones sobre la probabilidad, entre ellas, la de posibilidad de que un evento ocurra. Una acepción de lo aleatorio se puede observar en el diccionario de M. Moliner (1983): "Incierto. Se dice de aquello que depende de la suerte o del azar", siendo el azar "la supuesta causa de los sucesos no debidos a una necesidad natural ni a una intervención humana ni divina". De acuerdo con Poincaré (1936) los filósofos clásicos ya diferenciaban los fenómenos aleatorios de los no aleatorios; los primeros no podían preverse o determinarse porque se rebelaban a toda ley, mientras que los segundos parecían obedecer a las leyes conocidas.

Además, un experimento aleatorio puede entenderse como aquel experimento para el cual, sus resultados no pueden ser determinados de antemano (Blanco, 2004). Al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio se le denomina espacio muestral. Una variable aleatoria se conceptualiza como una función medible definida desde el espacio muestral hacia el conjunto de los números reales. De manera intuitiva una variable aleatoria transforma los resultados del espacio muestral en números reales. De acuerdo con Lindgren (1993) si el rango de una variable aleatoria es un conjunto contable, entonces la variable aleatoria es discreta y si la variable toma cualquier valor en un intervalo de números reales se denomina continua.

Por otro lado, entendemos como recurso didáctico todo material, herramienta o medio que ayuda al profesor a lograr que los alumnos comprendan mejor un tema, o bien, adquieren los aprendizajes deseados. En este sentido los recursos didácticos contribuyen al profesor a trasladar el contenido en contenido enseñable, y a los estudiantes como guía para poder aprender y poner en práctica los contenidos. De este modo, los recursos didácticos, en conjunto con las estrategias o actividades que el profesor planea en su clase, llegan a reflejar formas de representación del contenido a enseñar.

La simulación como un recurso didáctico

Batanero (2001) afirma que el uso de modelos y simulaciones en contextos concretos es un paso necesario en la construcción del conocimiento científico, en la enseñanza de la probabilidad y que representa un instrumento importante; en el cual se incluye la simulación a través de modelos aleatorios entre su lista de ideas estocásticas fundamentales (Heitele, 1975). La simulación se puede utilizar en diferentes contextos: a) como un modelo pseudo concreto en distintas situaciones reales ya que desempeña un papel intermedio entre la realidad y el modelo matemático, b) como herramienta matemática para mejorar las *intuiciones* probabilísticas de los estudiantes, c) para enseñar procesos de modelación con fenómenos aleatorios y d) para favorecer la discriminación entre modelo y realidad.

Desde el Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC o *PCK, Pedagogical Content Knowledge*, por sus iniciales en inglés) de acuerdo con Shulman (1986, 1987) el profesor ha de aprender a enseñar y comprender el contenido de la materia a impartir en la clase, articular el saber de la disciplina y la didáctica de manera conjunta a fin de favorecer el aprendizaje del estudiante; por tal razón, el maestro debe desarrollar su CDC conceptualizado como "las formas más útiles de representación [del contenido]..., las más poderosas analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones-de manera breve, las formas de representación y formulación de la materia que la hagan comprensible a otros (p.9)".

El CDC del profesor involucra tres componentes fundamentales: el conocimiento del contenido del tópico a enseñar, el conocimiento de representaciones instruccionales y el conocimiento de la forma cómo el estudiante aprende. Estas representaciones pueden ser de carácter general, como las preguntas utilizadas por el docente y sus explicaciones, y otras específicas asociadas con la naturaleza de la disciplina o el tópico a enseñar, como la simulación o las gráficas estadísticas (Pinto, 2010). Las estrategias y representaciones utilizadas en la enseñanza de un tema particular, forman parte de las didácticas específicas de la disciplina a la cual pertenece dicho tema (Bolívar, 2005). En el caso de la enseñanza de conceptos relacionados con la probabilidad, entre las formas útiles de representación están la simulación de fenómenos aleatorios, los diagramas de árbol, las secuencias aleatorias y el análisis combinatorio entre otras (Landín y Sánchez, 2011). En este sentido, la simulación ha de entenderse como un recurso didáctico en el aprendizaje del concepto de probabilidad.

Adicionalmente, el CDC corresponde a la capacidad que un profesor posee a fin de transformar el conocimiento de un tópico específico en representaciones didácticas que sean significativas, comprensibles o asimilables para los estudiantes. En consecuencia, un profesional en la enseñanza del contenido probabilístico en el nivel de la educación pre universitaria es aquel que manifiesta tanto un conocimiento del contenido a enseñar como un "conocimiento didáctico" de dicho contenido; la función de las didácticas específicas en conjunción con la didáctica general ha de ser la de proporcionar este conocimiento (Bolívar, 2005).

Según Lucio (2009) en la formulación de una didáctica se han de tener presente elementos como: los individuos *a* quienes se les tendrá enseñar, los temas que se vayan a desarrollar, el enfoque metodológico que se piense utilizar y el profesor aprovisionado de unos conocimientos acerca de un determinado tema y de conocimientos referentes en la didáctica específica de ese tema. En resumen, que al menos se tenga claro a quién, qué, cómo y quién tendrá que enseñar una temática determinada en concordancia con los aspectos curriculares.

Para este trabajo, el *qué* enseñar corresponde al tema de probabilidad y más precisamente a la estimación de probabilidades, respecto a *quienes* enseñar es conveniente mencionar que el tema de probabilidad se puede abordar de manera diferenciada a los estudiantes de educación pre y universitaria; por ejemplo el tema de generación de valores de variables aleatorias es recomendable para estudiantes del nivel universitario. Referente al enfoque metodológico es necesario indicar que el tema de probabilidad se puede trabajar en el nivel pre universitario desde una perspectiva basada en la intuición utilizando materiales manipulables o software educativo relacionado con simulación de eventos; se ha de utilizar la lúdica y la simulación como recurso didáctico. En el nivel universitario es pertinente desarrollar procesos de simulación de manera formal; para esto, el profesor ha de percatarse de que el estudiante tenga dominio de ciertas distribuciones de probabilidad, aplique distintos métodos para generar números aleatorios, desarrolle algoritmos manualmente o en el computador (Martínez, León & Pontes, 1994).

En lo concerniente a las didácticas específicas, es conveniente que el profesor planifique y desarrolle actividades que despierten el interés (motivación) e incrementen la comprensión en los estudiantes; analice el razonamiento de estos en situaciones de incertidumbre y tenga en cuenta que es natural que presenten sesgos y concepciones erróneas sobre la probabilidad (Guisasola & Barragués, 2002). En libros como los de Nisbett y Ross (1980) y Kahneman, Slovic y Tversky (1982) se describen algunos errores sistemáticos que el individuo suele cometer al tomar decisiones en presencia del azar.

Se ha investigado que dichos errores tienen una base psicológica, y la comprensión de las leyes teóricas de la probabilidad no siempre es suficiente para superarlos. Apoyarse en las investigaciones realizadas por Fischbein (1975) sobre la intuición en el pensamiento aleatorio de los niños o en las realizadas por Piaget e Inhelder (1951), Konold (1991) y Jones, Langrall y Mooney (2007) sobre el desarrollo del razonamiento probabilístico y la comprensión del azar puede favorecer el aprendizaje de los conceptos probabilísticos. De acuerdo con Godino, Batanero, Roa y Wilhelmi (2008) los conceptos relacionados con la probabilidad son uno de los tópicos más difíciles de enseñar y un gran número de profesores presentan poca experiencia en esta área. Según Batanero (2001) para introducir un nuevo tema en el currículo es recomendable estudiar el razonamiento de los individuos respecto al mismo y valorar hasta qué punto son asequibles al estudiante. En lo referente a la comprensión de los conceptos asociados con la probabilidad, se pueden aprovechar los estudios realizados por Serrano (1996), Stohl (2005), Inzunsa y Guzmán (2011), Maanan y de Haro (2012), entre otros.

Maneras de utilizar la simulación

Nivel intuitivo o elemental. En concordancia con Batanero (2001) la simulación estadística consiste en establecer una correspondencia biunívoca entre dos experimentos aleatorios diferentes, con la condición de que a cada suceso elemental del primer experimento le corresponda un suceso elemental del segundo y sólo uno, de tal manera que los sucesos puestos en correspondencia en ambos experimentos tengan igual probabilidad de ocurrir. En el nivel elemental, un uso de la simulación consiste en sustituir un experimento aleatorio difícil de observar en la realidad, por otro equivalente. Lo interesante de la simulación en este nivel, es que se puede realizar varias veces el segundo experimento y utilizar sus resultados para obtener información del primero. En Polya (1982), se sugieren algunos ejemplos para simular procesos aleatorios manuales con secuencias de extracciones de bolas en urnas. Pedagógicamente, es conveniente desarrollar un número suficiente de actividades relacionadas con ocurrencias de la vida diaria de los estudiantes.

Nivel formal o avanzado. Este también se denomina nivel formal o de axiomatización, para desarrollar procesos formales de simulación se ha de tener en cuenta la conceptualización hecha al respecto por Churchman (1973). Además, es conveniente hacer una reflexión profunda sobre el fenómeno a simular hasta comprenderlo y poder generar un algoritmo[4] bien estructurado que permitan desarrollar un proceso de simulación. En Naylor, Balintfy y Chu (1977) se afirma que para la planeación de experimentos de simulación se requiere implementar las siguientes etapas: 1) formulación del problema, 2) recolección y procesamiento de datos tomados de la realidad correspondientes a variables controlables o no controlables (aleatorias), 3) formulación de modelos matemáticos, 4) estimación de parámetros a partir de datos reales (muestras), 5) evaluación de los modelos matemáticos propuestos con base en los parámetros estimados, 6) formulación de un programa para el computador, 7) validación, 8) ejecución del experimento de simulación y 9) análisis de los datos.

Autores como Churchman (1973), Naylor et al. (1977), Papoulis (1991), Azarang (1996), Ross (1999), Ríos *et al*. (2000) quienes han desarrollado simulación por computador, en alguna medida hacen notar que, para realizar procesos de simulación en el nivel formal es conveniente partir de modelos matemáticos y apoyarse en herramientas teóricas provenientes de la estadística matemática, la teoría de probabilidad, las ecuaciones diferenciales y la programación de computadores entre otras. Con respecto a la simulación de variables aleatorias, se han utilizado modelos provenientes del campo de la probabilidad (Marsaglia, 1963) y se han construido métodos generales como el de la transformada inversa, el del rechazo, el de Box-Muller y métodos mixtos, entre otros (Burbano, Valdivieso y Salcedo, 2014).

Metodología

El trabajo se desarrolló en dos fases: en la primera se obtienen estimaciones sobre la probabilidad teórica de un experimento aleatorio para predecir el color que señalará la pluma de una ruleta dividida en seis secciones circulares de igual área pintadas con diferentes colores; así mismo, medir la probabilidad de que la pluma termine ubicada en el color rojo. En este caso se trabaja con fundamento en el concepto de equiprobabilidad y la concepción

4 En general, un algoritmo es un conjunto de pasos para resolver un problema.

frecuencial. La probabilidad teórica de que la pluma indique el color rojo es de un sexto (1/6=0.1666 aproximadamente). Las actividades involucradas en los procesos de simulación a nivel intuitivo fueron desarrolladas por un grupo de 20 estudiantes con edad entre los 15 y 18 años pertenecientes a una institución educativa de la ciudad de Tunja en Colombia. Dichos estudiantes cursaban el grado once y decidieron participar de manera voluntaria en el estudio una vez se les explicó el propósito del mismo.

La recogida de información se realizó utilizando una encuesta y los procesos de simulación realizados con el software NVLM (*National Library of Virtual Manipulatives*, por sus iniciales en inglés) versión de prueba gratuita perteneciente a la Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales que se pudo descargar de internet en la dirección http://nvlm.usu.edu/es/nav/vlibrary.html; una salida de este software se visualiza en las Figuras 1 y 2. La encuesta incluyó los siguientes cinco ítems: 1) ¿le gusta practicar algunos juegos de azar?, 2) ¿ha oído hablar sobre la probabilidad?, 3) ¿al girar una ruleta dividida en seis secciones circulares de igual área pintadas con diferentes colores, usted podría predecir el color que señalará la pluma de la ruleta?, 4) ¿ha utilizado el computador para hacer cálculos? y 5) ¿le gustaría aprender a simular algunas cantidades en el computador? Esta encuesta se aplicó antes del desarrollo del proceso de simulación. La pregunta número tres permite valorar las intuiciones que el estudiante posee respecto a los fenómenos aleatorios y posibilita verificar si nuestras intuiciones nos engañan.

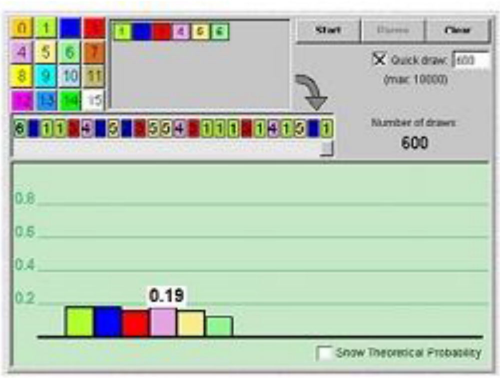

Figura 1. Entorno gráfico del simulador NVLM

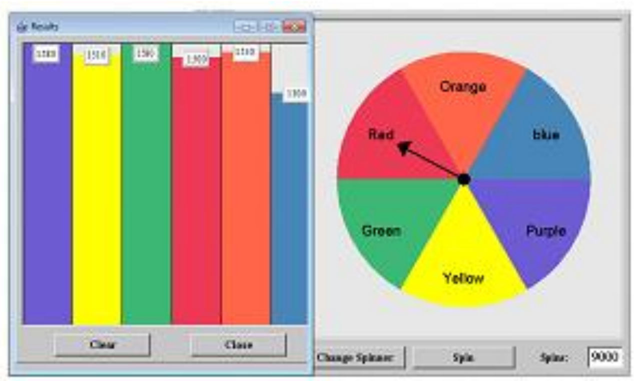

Figura 2. Ruleta, entorno gráfico del simulador NVLM. Red=cuatro

En la segunda fase se obtienen estimaciones acerca de la cantidad de bebida gaseosa embotellada por una máquina en una situación hipotética, bajo el supuesto de que la cantidad de líquido embotellado será lo más uniforme posible, el promedio poblacional sea de 200 mililitros, las cantidades de líquido estén entre 198 y 202 mililitros y las estimaciones se considerarán válidas para un error absoluto inferior a 0.8. En esta fase se toma como fundamento la teoría referente a las distribuciones de probabilidad, en particular se utiliza una distribución uniforme en el intervalo *(198 , 202)* de parámetro igual a 200. Así mismo, se usa algunos conceptos referentes al nivel avanzado de simulación incluido el método de la transformada inversa. En las actividades de simulación participaron 16 estudiantes universitarios con edad superior a los 19 años, quienes ya habían abordado las temáticas correspondientes a modelos continuos de probabilidad en una de las carreras (titulaciones) en una universidad de la ciudad de Tunja en Colombia y participaron de manera voluntaria en el estudio.

En este caso, también se hizo una encuesta y se desarrolló el proceso de simulación mediante la variable aleatoria continua referente a la cantidad de líquido embotellado, se utilizó el software libre **R** manejando un número variable de iteraciones. Una salida de este software se visualiza en la figura 3. La encuesta incluyó también cinco ítems: 1) ¿usa el computador para hacer cálculos?, 2) ¿ha oído hablar sobre simulación?, 3) ¿recuerda algunos modelos continuos de probabilidad?, 4) ¿ha generado números aleatorios en el computador? y 5) ¿le gustaría aprender a simular algunas variables aleatorias continuas en el computador? Esta encuesta fue practicada con antelación al desarrollo del proceso de simulación. Así mismo, antes de usar el software **R**, en una sesión de 1 hora, el profesor con sus estudiantes seleccionan la distribución más apropiada para resolver el problema, generan números aleatorios y elaboran un segmento de programación a ejecutar en **R**.

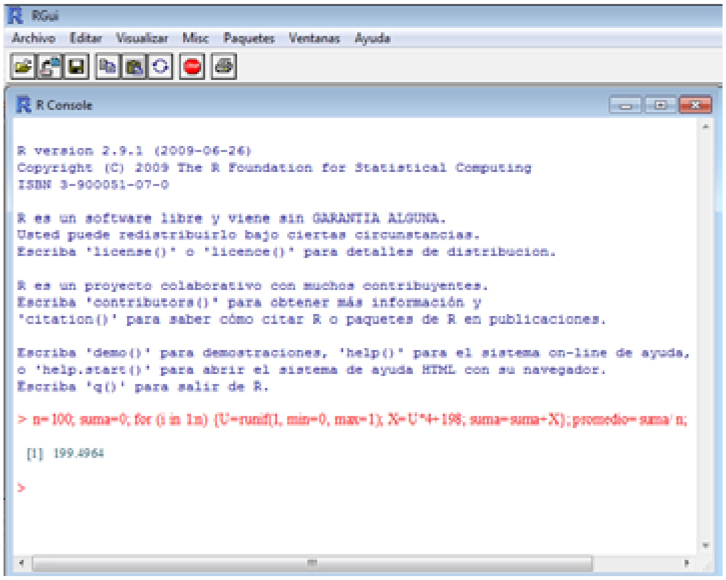

Figura 3. Entorno de R, con una salida de 199.4964 como promedio

Los instrumentos mencionados en las dos fases permitieron recoger la información que posibilitó realizar un análisis exploratorio de los datos en concordancia con el enfoque cuantitativo de investigación, enfatizando un carácter descriptivo (Campos, 2009; Creswell y Garrett, 2008). Los datos fueron procesados utilizando el software estadístico SPSS en su versión estudiantil y las salidas se interpretaron en el contexto de este estudio.

Resultados y su análisis

Análisis exploratorio para la primera fase

En la tabla 1 se presentan las respuestas dadas por el grupo de 20 estudiantes a las preguntas de la encuesta. La primera pregunta fue etiquetada como 'Juegoazar' y se codificó así: Nada=1, Poco=2, Mucho=3. La segunda se denominó 'Probabilidad'. La tercera se llamó 'Predecir'. La cuarta se etiquetó con el término 'Computador' y la quinta se denotó como 'Simular'. A excepción de la primera pregunta, las demás se codificaron de la siguiente manera: Si=1, No=0

Con base en los datos de la tabla 1 se ha obtenido la figura 4, la cual permiten deducir que al 25% de los estudiantes no le gusta practicar juegos de azar, al 45% le gusta poco y al 30% le gusta mucho. Los datos permiten interpretar que en este grupo de estudiantes existe una tendencia hacia la poca o nula afición por los juegos de azar; es decir, que los estudiantes han tenido poca oportunidad de experimentar con mecanismos aleatorios.

Tabla 1. Respuestas encuesta a 20 estudiantes. Codificación Si=1, No=0

Estudiante	Juegoazar	Probabilidad	Predecir	Computador	Simular
1	1	0	0	0	1
2	2	1	0	1	1
3	2	0	1	1	1
4	1	0	1	0	1
5	2	1	0	1	1
6	3	0	1	1	1
7	3	0	0	0	1
8	3	1	1	1	1
9	2	0	0	1	1
10	2	0	1	1	1
11	1	0	0	0	1
12	2	1	0	1	1
13	2	0	1	1	1
14	1	0	1	0	1
15	2	1	0	1	1
16	3	0	1	1	1
17	3	0	0	0	1
18	3	1	1	1	1
19	2	0	0	1	1
20	1	1	0	0	0

La tabla 2 indica que el 65% de los estudiantes no ha oído hablar sobre la probabilidad hasta el grado once y solo 35% si ha tenido esa oportunidad, estos resultados concuerdan con los mencionados al respecto en un estudio realizado los municipios de Dos Quebradas y Pereira en Colombia (Arias & Cardona, 2008). Estos mismos porcentajes también se obtener a partir de los resultados presentados en la columna 'Probabilidad' de la tabla 1.

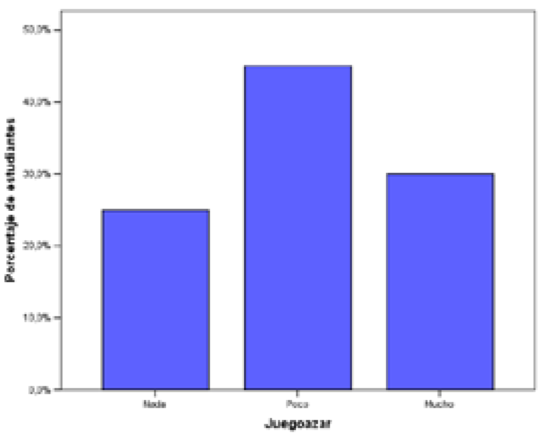

Figura 4. Gusto por la práctica de los juegos de azar

La tabla 3 permite interpretar que el 55% de los estudiantes no lograron predecir con su intuición que la pluma de la ruleta al final señalaría el color rojo y el 45% si lo logró. Estos mismos porcentajes también se pueden deducir de la columna 'Predecir' de la tabla 1. La información presentada en la tabla 3 proporciona indicios de que algo más de la mitad de los estudiantes confían en su intuición de que la pluma no señalará el color rojo mientras que el resto cree que si lo hará.

La tabla 4 señala que solamente un 35% de los estudiantes no han utilizado el computador para hacer cálculos y el 65% si lo ha hecho. De la columna 'Computador' en la tabla 1, también se pueden obtener los mismos porcentajes. La anterior situación indica que la mayoría de las estudiantes está familiarizada con el uso del computador particularmente para hacer cálculos (operaciones aritméticas); esta circunstancia puede favorecer el desarrollo de las actividades relacionadas con procesos iterativos que implique el manejo de volúmenes grandes de números ya no manualmente.

En la tabla 5 se observa que al 95% de los estudiantes si les gustaría aprender a simular eventos usando el computador y al 5% no le gustaría (quizá existe temor a usar el computador como herramienta de apoyo para el aprendizaje en general y de la simulación en particular, este 5% de estudiantes puede estar poco familiarizado con el manejo del computador y desconocer el término simulación). Esta información hace pensar que el uso del computador y el término simulación, en un alto porcentaje despierta el interés por el aprendizaje de esta temática y motiva al estudiante hacia el desarrollo de actividades usando el computador.

A continuación se presentan los resultados de los procesos de simulación para obtener las estimaciones de la probabilidad teórica referente al juego de la ruleta. Aquí la "**n"** representa la cantidad de veces que se debía girado la ruleta por cada uno de los estudiantes. Para **n=18**, inicialmente se solicitó a cada estudiante que manifieste de forma intuitiva cuántas veces cree que la pluma de la ruleta señalaría el color rojo (antes de girar la ruleta), los datos se presentan en la columna codificada con el término 'Intuir' en la Tabla 6. Luego cada estudiante giró la ruleta 18 veces y anotó el número de veces que la pluma señaló el color rojo, los resultados se codificaron con 'Frec-rojo'.

Con esta información se definió la variable dicotómica denominada 'Coincide' a fin de determinar en esta primera experimentación si existe o no coincidencia entre las intuiciones de los estudiantes y los resultados de dicha experimentación. Al cociente entre cada valor de Frec-rojo y 18 se le llamó 'Estimación' para referirse a la estimación de la probabilidad teórica cuyo valor es 1/6=0.1666...Finalmente, se conformó la columna 'Est-válida' para indicar si la estimación podría considerarse válida o no admitiendo un error absoluto de 0.04 al comparar con la probabilidad teórica. Aquí se usan las notaciones Si=1 y No=0.

La tabla 6 indica que datos correspondientes a la variable "Intuir" solo coincidieron en un 30% de los casos con los de la variable 'Frac-rojo'.

Tabla 2. Pregunta 2. 'Probabilidad'

	Frecuencia	Porcentaje
No	13	65,0
Si	7	35,0
Total	20	100,0

Tabla 3. Pregunta 3. 'Predecir'

	Frecuencia	Porcentaje
No	11	55,0
Si	9	45,0
Total	20	100,0

Tabla 4. Pregunta 4. 'Computador'

	Frecuencia	Porcentaje
No	7	35,0
Si	13	65,0
Total	20	100,0

Tabla 5. Pregunta 5. 'Simular'

	Frecuencia	Porcentaje
No	1	5,0
Si	19	95,0
Total	20	100,0

Tabla 6. Resultados girar la ruleta, n=18, Si=1, No=0

Estudiante	Intuir	Frec-Rojo	Coincide	Estimación	Est.válida
1	5	3	0	0,166666667	1
2	6	2	0	0,111111111	0
3	3	3	1	0,166666667	1
4	2	4	0	0,222222222	0
5	1	3	0	0,166666667	1
6	2	4	1	0,222222222	0
7	3	3	1	0,166666667	1
8	2	3	0	0,166666667	1
9	1	2	0	0,111111111	0
10	3	2	0	0,111111111	0
11	1	3	0	0,166666667	1
12	2	3	0	0,166666667	1
13	2	2	1	0,111111111	0
14	1	3	0	0,166666667	1
15	2	1	0	0,055555556	0
16	3	3	1	0,166666667	1
17	2	4	0	0,222222222	0
18	3	3	1	0,166666667	1
19	2	3	0	0,166666667	1
20	1	3	0	0,166666667	1

La exploración de estos resultados permiten interpretar que en un 70% las intuiciones de los estudiantes fallaron (los engañaron) con respecto a los valores de Frac-rojo obtenidos en la experimentación para predecir el fenómeno aleatorio. Por otro lado, las estimaciones logradas en el proceso manual de simulación resultaron válidas en un 60% (en 12 de los 20 casos) admitiendo un error absoluto de 0.04. El hecho de que solamente el 60% de las estimaciones haya resultado válido puede atribuirse a que ***'n'*** corresponde a un número pequeño de simulaciones. Desde el enfoque frecuencial se requiere un número grande de repeticiones (Mises, 1952; Inzunsa & Guzmán, 2011).

Tabla 7. Resultados girar la ruleta, n=600, Si=1, No=0

Estudiante	Intuir	Frec-rojo	Coincide	Estimación	Est.válida
1	103	105	0	0,175	1
2	101	98	0	0,163333333	1
3	104	102	0	0,17	1
4	97	99	0	0,165	1
5	110	101	0	0,168333333	1
6	99	98	0	0,163333333	1
7	100	100	1	0,166666667	1
8	102	99	0	0,165	1
9	98	102	0	0,17	1
10	107	108	0	0,18	1
11	100	105	0	0,175	1
12	100	97	0	0,161666667	1
13	104	102	0	0,17	1
14	90	93	0	0,155	1
15	98	102	0	0,17	1
16	100	99	0	0,165	1
17	100	103	0	0,171666667	1
18	102	100	0	0,166666667	1
19	98	99	0	0,165	1
20	101	99	0	0,165	1

En este punto del proceso de simulación, se formuló a los estudiantes la siguiente pregunta, ¿será divertido realizar el anterior ejercicio manualmente para **n=600**? A esta pregunta, el 95% respondió que no era divertido. Por consiguiente, para un número grande de giros de la ruleta era conveniente buscar métodos alternativos. Se mencionó entonces que el computador aprovisionado de un software de simulación apropiado podría realizar una tarea similar (emular) a la realizada manualmente. El profesor indicó el entorno del software NVLM y la forma de trabajar con éste. En seguida, nuevamente los estudiantes proporcionaron valores intuitivos y luego ejecutaron el programa para **n=600**. Los resultados se observan en la tabla 7.

En la tabla 7 se observa que ninguno de los valores de la variable 'Intuir' coincide con los valores de la variable 'Frec-rojo', esto se puede atribuir a que el rango de posibilidades para que la pluma señale el color rojo ahora es mayor. Sin embargo la diferencia entre esas frecuencias no supera las cinco unidades; es decir se ha ganado precisión en lo referente a las intuiciones de los estudiantes. También se observa que el 100% de las estimaciones resultaron válidas porque su diferencia con el valor teórico de 0.1666 fue inferior al error absoluto de 0.04. Lo anterior permite hacer la siguiente interpretación: al aumentar el número de simulaciones, las estimaciones válidas también aumentan y su valor está más próximo al valor teórico.

En esta actividad, el uso del entorno gráfico del simulador NVLM resultó ser bastante atractivo para los estudiantes ya que presenta las características de un juego didáctico, por lo que ellos manifestaron verbalmente que se les permitiera manipular el simulador con un **'n'** muchísimo mayor. Se propuso trabajar con **n=9000.** Esto indica que el proceso de simulación ha motivado a los estudiantes. Además el 100% de ellos una vez más manifiestan que ahora no sería necesario ni divertido girar la ruleta manualmente este número tan grande de veces. Los resultados no se tabularon, pero permitieron observar que todas las estimaciones resultaron válidas y se aproximaron aún más al valor teórico.

Análisis exploratorio para la segunda fase

La tabla 8 contiene las respuestas dadas por el grupo de los 16 estudiantes universitarios para las preguntas de la entrevista. La primera pregunta fue llamada 'Computador' y se codificó así: Nada=1, Poco=2, Mucho=3. La segunda se denominó 'Simulación'. La tercera se denotó con 'M-continuo'. La cuarta se denominó 'No. Aleatorio' y la quinta se llamó 'Var-alea'. A excepción de la primera pregunta, las restantes se codificaron con Si=1, No=0.

Tabla 8. Respuestas encuesta a 16 estudiantes universitarios. Codificación Si=1, No=0

Estudiante	Computador	Simulación	M-continuo	No. Aleatorio	Var-alea
1	1	0	1	1	0
2	2	1	1	0	1
3	2	1	0	0	1
4	2	0	1	0	1
5	3	1	0	1	1
6	2	1	1	1	1
7	3	0	0	0	1
8	3	1	0	0	1
9	3	1	1	0	1
10	2	0	1	0	1
11	2	1	0	0	1
12	2	0	1	0	1
13	3	1	0	1	1
14	3	1	1	1	1
15	3	0	1	0	0
16	2	0	1	0	1

De la tabla 8 se deduce que 6.25% de los estudiantes universitarios participantes en este estudio no usa el computador para hacer cálculos, el 50% lo usan poco y 43.75% lo utilizan mucho. Lo anterior permite interpretar que más del 93% aprovechan las potencialidades del computador como herramienta para realizar cálculos. Así mismo, en la mencionada tabla se observa que 43.75% de los estudiantes no ha oído hablar acerca de simulación hasta este momento de su vida estudiantil y el 56.25% si lo ha hecho. Estos porcentajes fueron calculados con los datos de la variable 'Simulación'. Un 37.5% no recuerdan algunos modelos continuos de probabilidad y el 62.5% si los tienen presentes. Este panorama ratifica la concepción de que los estudiantes olvidan las temáticas tan pronto aprueban sus materias, tal vez porque los recursos didácticos y las estrategias pedagógicas usados por el profesor no promuevan el aprendizaje significativo.

De la tabla 8 también se deduce que un 68.75% de los estudiantes no han generado números aleatorios en el computador y solamente 31.25%5 si lo ha hecho. Estos porcentajes se obtuvieron de la columna 'No-.aleatorio'. La anterior situación hace intuir que la mayoría de las estudiantes no está familiarizada con la generación de números aleatorios mediante el computador; este impase no favorable el desarrollo de procesos formales de simulación. Sin embargo, se superará en el transcurso de esta fase. Finalmente, al 87,5% de los estudiantes si les gustaría aprender a simular valores de una variable aleatoria usando el computador. Esta situación permite inferir que el uso del computador y la expectativa de hacer simulación pueden despertar el interés por el aprendizaje inicial de la temática y motiva hacia el desarrollo de procesos de simulación.

En seguida, se presentan los resultados del proceso de simulación de la cantidad de bebida gaseosa embotellada por una máquina. En primer lugar, con base en lo expuesto por Ross (1999) y Burbano (2010) se dedujo que la expresión a utilizar es: *X=U(b-a)+a* como resultado de aplicar el método de la transformada inversa a la función de distribución uniforme definida en el intervalo *(a , b);* para la situación hipotética considerada se debía considerar: *X :* cantidad de bebida gaseosa embotellada, *U:* variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo *(0 , 1)* necesaria para general los números aleatorios, *a=19*8 y *b*=202. De forma manual con una calculadora de bolsillo y a manera de ejemplo se generaron **n=5** números aleatorios U y se reemplazaron en la expresión *X=U(b-a)+a* mencionada, obteniéndose los cinco valores simulados que a continuación se indican:

$$X = 0,139644(202\text{-}198)+198 = 198,5586;$$

$$X = 0,431302\ (4)+198= 199,7252;$$

$$X = 0,612179\ (4)+198 = 200,4487;$$

$$X = 0,290753\ (4)+198= 199,1630;$$

$$X= 0,155732\ (4)+198= 198,6229.$$

El promedio es:

$$(198,5586+199,7252+200,4487+200,4487+198,6229)/5=199.3037.$$

Este proceso manual resulta inconveniente para un número **'n'** mayor de simulaciones. Por lo tanto se indicó el siguiente segmento de programación para que se pudiera ejecutar en **R** y lograr que cada uno de los participantes trabajara con un **n=**100, **n=**5000 y **n=**10000 simulaciones. > n=100; suma=0; for (i in 1:n) {U=runif(1, min=0, max=1); X=U*4+198; suma=suma+X}; promedio=suma/n.

Posteriormente, en el segmento de programación se cambió el valor de **n** a 5000 y 10000 respectivamente. Los resultados de los promedios simulados se pueden observar en la Tabla 9. Para n=100, n=5000 y n=10000, el 100% de las estimaciones resultaron válidas porque su diferencia absoluta con el valor teórico para la media de 200 mililitros no superó el valor de 0.8 propuesto como error. Además se observa que a medida que el número de simulaciones aumenta, las estimaciones se acercan de manera significativa hacia el parámetro 200.

En esta actividad, el segmento de programación codificado y ejecutado en el software libre **R**, favoreció la realización del proceso de simulación. El entorno amigable de **R** resultó atractivo para los estudiantes quienes trabajaron bajo la idea de que se trataba de un juego didáctico y también manifestaron de forma verbal que les agradaría continuar realizando procesos de simulación que incluyeran otros modelos continuos de probabilidad. Lo anterior proporciona indicios que el ambiente computacional utilizado y el proceso de simulación desarrollado llama la atención de los estudiantes y los motiva hacia el aprendizaje inicial de los procesos de simulación en el nivel avanzado.

Tabla 9. Promedios simulados de la cantidad de bebida gaseosa embotellada

Estudiante	*n=100*	*n=5000*	*n=10000*
1	199,4964	200,1984	200,0183
2	200,5487	200,1202	199,9587
3	199,9879	200	199,9715
4	200,0462	199,9764	200,0001
5	200,6288	199,7498	199,9727
6	199,2952	200,0191	199,9996
7	200,1382	199,7984	199,9863
8	199,9712	200,002	200,005
9	199,6964	200,0945	199,9966
10	200,6487	199,9764	199,9835
11	199,9879	200,1498	200,0096
12	199,5462	199,9984	200,0073
13	200,3288	200,032	199,9988
14	199,9952	200,2354	199,9893
15	200,7382	199,9764	199,9916
16	200,7712	199,9498	200,0059

Discusión

Del análisis de los resultados de la encuesta en la sección 4.1 se infiere que la simulación puede constituirse en un recurso didáctico para el aprendizaje de temas relacionados con la probabilidad y el computador es una herramienta eficaz para hacerlo puesto que los estudiantes manifiestan una gran expectativa y un alto interés al respecto. Una vez realizados los procesos de simulación, en esta misma sección, se encuentra que la simulación efectivamente fue un recurso didáctico para estimar la probabilidad teórica de un evento y una poderosa herramienta para comprobar que las intuiciones sobre lo aleatorio presentadas por los estudiantes fallaron (los engañaron); esto tiene concordancia con lo expuesto en Batanero (2001) para quien 'nuestras intuiciones con frecuencia nos engañan'.

La simulación favoreció la consecución de las estimaciones de la probabilidad teórica bajo la condición de error 0.04 dada. La experiencia educativa resultó gratificante para los estudiantes participantes puesto que sí despertó el interés por el aprendizaje de la probabilidad, permitiendo hacer la diferencia entre la probabilidad teórica y sus estimaciones; así mismo, motivó a los estudiantes para realizar la actividad que hubiera resultado demasiado tediosa de haberse realizado manualmente para n=600 y para n=9000). El proceso de simulación sobrepasó las expectativas que tenían los estudiantes puesto que les permitió de manera manual y mediante el computador la ejecución directa de dicho proceso y promovió el razonamiento probabilístico y la adquisición de habilidades de pensamiento y acción frente a la resolución de problemas que involucran el azar.

De la parte inicial de la sección 4.2 se deduce que la simulación se puede constituir en un recurso didáctico efectivo para el aprendizaje de temas relacionados con la generación de valores de algunas variables aleatorias y que el computador puede constituirse en una herramienta muy importante que facilita el volumen de cálculos involucrados en la simulación a nivel formal de dichos valores. De la parte final, se interpreta que los procesos de simulación realizados despierta el interés y motiva a los estudiantes a profundizar en el aprendizaje de las distribuciones de probabilidad y a iniciar el estudio de los procesos de simulación en el nivel avanzado.

Las encuestas realizadas proveen información que permite al profesor diagnosticar la situación de entrada de los estudiantes e identificar factores circunstanciales que pueden estar afectando su interés y motivación en el aprendizaje de la probabilidad y el uso de la simulación; además, en el profesor incrementa el conocimiento de la forma cómo el estudiante aprende, situación que posibilita el incremento de su conocimiento didáctico del contenido (Shulman, 1987). En este mismo sentido, la simulación puede constituirse en una forma de representación útil para la enseñanza de la probabilidad bajo la concepción frecuencial.

La simulción como un recurso didáctico ha de usarse en concordancia con los niveles conceptuales que presenten los estudiantes en consonancia con su edad y estructura cognitiva a fin de pasar de forma paulatina del nivel elemental al avanzado. Tal como afirma Burbano, Valdivieso y Salcedo (2011), para trabajar de manera efectiva en el nivel formal en lo referente a la simulación de variables aleatorias se requieren cuatro elementos: la generación de números aleatorios incluyendo pruebas estadísticas, la utilización de una o más distribuciones de probabilidad, la selección de un método de simulación y la aplicación de un algoritmo construido para tal fin. Se puede mejorar el aprendizaje de la probabilidad utilizando el software libre **R**, el software NVLM antes mencionado, simuladores y applets, software educativo como Fathom y Probability Explorer puede ser utilizado de manera grupal tanto por estudiantes del nivel de educación primaria como de la básica secundaria (Stohl & Tarr, 2002). Programas como EstadLab, Siespro, ProbSim, Simulaprob, CDPYE, TinkerPlots, entre otros pueden utilizarse a nivel superior preferentemente (Osorio, Suárez & Uribe, 2013).

Conclusiones

Los procesos de simulación ejecutados despertaron el interés tanto de los estudiantes que trabajaron a nivel intuitivo como de los que se iniciaron en el nivel formal, quienes de antemano y en un alto porcentaje (95% y 93%, respectivamente) manifestaron su deseo de aprender a simular algunos fenómenos aleatorios a pesar de haber tenido poco contacto con los conceptos de probabilidad y simulación.

El computador se constituye en una herramienta importante para la estimación de probabilidades cuando los fenómenos aleatorios a estudiar puede ser modelados con un número grande de repeticiones puesto que los métodos manuales pueden resultar menos efectivos y podrían tornarse poco atractivos para los estudiantes que los estén utilizando; así lo manifiesta el 100% de los participantes con el juego de la ruleta al señalar "ahora no sería necesario ni divertido girar la ruleta manualmente un número tan grande de veces".

La simulación es un recurso didáctico que ayuda a comprobar las intuiciones que tienen las personas con respecto a los fenómenos aleatorios o que presenten incertidumbre, y a obtener estimaciones en situaciones de experimentación correspondientes a problemas reales. Asimismo, este recurso ha de utilizarse de manera diferenciada en concordancia con los pre requisitos cognitivos de los estudiantes sobre elementos de probabilidad que permitan ir paulatinamente del nivel intuitivo hacia el nivel formal teniendo en cuenta que en los dos niveles de simulación se han de manejar con diferentes grados de dificultad conceptual.

Los procesos de simulación posibilitan la obtención de estimaciones con base un error especificado sobre la probabilidad teórica de un determinado evento o la simulación de valores de variables aleatorias con una distribución de probabilidad particular, pudiéndose ampliar para una gama amplia de modelos de probabilidad; estas estimaciones se pueden lograr mediante métodos manuales o utilizando software de simulación y se pueden refinar hasta tener errores bastante pequeños con la ayuda del computador.

La simulación usada de manera pertinente puede acrecentar el Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) del profesor siempre y cuando esta se constituya en una representación instruccional útil para la enseñanza de la probabilidad, extrapolando las ideas de Shulman sobre el constructo teórico del CDC. Diversos programas de computador puede facilitar el desarrollo de procesos de simulación de manera que contribuyan al mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad.

Referencias

Alexander, R. & Kelly, B. (1999). *Mathematics 12: Western Canadian edition*. Don Mills: Addison-Wesley.

Arias, J. & Cardona, J. (2008). Estado del arte en la enseñanza de la probabilidad para la educación media en los municipios de Pereira y Dosquebradas. *Entre Ciencia e Ingeniería*, 2(4), 179, Pereira – Colombia.

Azarang, M. R., (1996). *Simulación y análisis de modelos estocásticos,* McGrawHill, México.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Grupo de Investigación En Educación Estadística. Universidad de Granada.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *8*(3), 247-263.

Batanero, C., Godino, J. D. & Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of statistics Education*, *12*(1), 1-19.

Blanco, L. (2004). *Probabilidad*. Universidad Nacional de Colombia.

Bolívar, A. (2005). Conocimiento didáctico del contenido y didácticas específicas. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, *9*(2), 1-39.

Burbano, V. M. A. (2010). Una manera alternativa de simular variables aleatorias con distribución normal, uniforme y logística.

Revista Ciencia en desarrollo 3(1), pp. 63-72*.*

Burbano, V. M. A., Valdivieso, M. A. y Salcedo, L. (2011). Distintas Formas De Simular variables aleatorias con distribución normal estándar. *Revista Ciencia en desarrollo 3*(2), pp. 145-161.

Burbano, V. M. A., Valdivieso, M. A. y Salcedo, L. (2014). *Simulación con modelos aleatorios: conocimiento estadístico-probabilístico y simulación*. Tunja: Editorial Uptc.

Campos, A. A. (2009). *Métodos Mixtos de investigación.* Bogotá: Editorial Magisterio.

Churchman, C. W. (1973). *El enfoque de sistemas*. Editorial Diana. México.

Creswell, J. W. & Garrett, A. (2008). The movement of mixed methods research and role of educators. En: *South African Journal of Education*. 28, p. 321-333. Recuperado el 21/09/2008.

Fischbein, E. (Ed.). (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children* (No. 85). Springer Science & Business Media.

Fischbein, E. & Schnarch, D. (1997). The Evolution with Age of Probabilistic, Intuitively Based Misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(1), 96-105

Gentle, J. E. (1998). *Random number generation and Monte Carlo methods.* New York: Springer.

Glasserman, P. (2004). *Monte- Carlo Methods in Financial Engineering.*

Computational Finance. New York: Springer Verlag.

Godino, J. D., Batanero, C. & Cañizares, M, J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis.

Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R. & Wilhelmi, M. R. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI and IASE.

Guisasola, J. & Barragués, J. I. (2002). Heurísticas y sesgos de los estudiantes de primer ciclo de universidad en la resolución de problemas de probabilidad. *Enseñanza de las Ciencias*, *20*(2), 285-302.

Heitele, D. (1975). An epistemogogical view and fundamental stochastic ideas. *Educational studies in Mathematics*, 6, 187-205.

Inzunsa, S. & Guzmán, M. C. (2011). Comprensión que muestran profesores de secundaria acerca de los conceptos de probabilidad: un estudio exploratorio. *Educación matemática*, *23*(1), 63-95.

Jiménez, A. (2005). *Formación de profesores de Matemática: Aprendizajes recíprocos Escuela-Universidad*. Tunja. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Búhos Editores.

Jones, G., Langrall, C & Mooney, E. (2007). Research in probability.

Responding to classroom realities, en F. K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Charlotte, Information Age Publishing, pp. 909-955.

Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (1982*). Judgment under uncertainty: heuristics and biases.* Nueva York: Cambridge University Press.

Konold, C. (1991). Understanding student's beliefs about probability. En E. V. Glasersfeld, (ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education*, Dordrecht, Kluwer, pp. 139-156.

Landín, P. R. & Sánchez, E. (2011). Niveles de razonamiento Probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a tareas de distribución binomial. *Educação Matemática Pesquisa. Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. ISSN 1983-3156*, *12*(3).

Law, M. A. M. & Kelton, W. D. (1991). *Simulation Modeling and Analysis.* México: McGraw Hill.

Lindgren, B. (1993): *Statistical Theory*. Fourth Edition. United of States of América: Editorial Chapman.

Liu, B. (2014). *Uncertainty Theory.* 4th edn, Springer-Verlag, Heidelberg.

Lucio, R. (2009). La Gestión de la Enseñanza y el Aprendizaje. *Colección Seminario Permanente de Pedagogía- SPP*; No. 1, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Maanan, N. M., & de Haro, J. J. O. (2012). Evaluación de conocimientos de profesores en formación sobre el juego equitativo. *Números*, 80, 103-117.

Marsaglia, G. (1963). Generating Discrete Random Variables in a Computer, en *Commun Assoc. Comput. Mach*., 6, pp. 37-38.

Martínez-Jiménez, P., León Álvarez, J. & Pontes Pedrajas, A. (1994). Simulación mediante ordenador de movimientos bidimensionales en medios resistentes. *Enseñanza de las Ciencias*, *12*(1), 30-38.

Mises, R. (1952). *Probabilidad, estadística y verdad*. Madrid, España: Espasa-Calpe (Trabajo original publicado en 1928).

Moliner, M. a (1983). *Diccionario de uso del español*, *1*.

Naylor, Th., Balintfy, J. & Chu, K. (1977). *Técnicas de simulación en computadoras.* Ed. Limusa, México.

Ninsbett, R.E. y Ross, L. (1980). *Human inference: Strategies and shortcomings and social judgment*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall.

Osorio, A., Suárez, P. y Uribe, A. (2013). Revisión de alternativas propuestas para mejorar el aprendizaje de la probabilidad. *Revista virtual Universidad Católica del Norte*. No. 38, pp. 127-142.

Pantoja, V. M. Á. B. (2014). Simulación en el contexto de la Didáctica de La Estadística. *ALAMMI, Revista científica*, 2.

Papoulis, A. (1991). *Probability, Random variables and Stochastic Process*. New York: McGraw-Hill Inc.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant, par Jean Piaget et Bärbel Inhelder*. Presses universitaires de France.

Pinto, S. J. (2010). *Conocimiento didáctico del contenido sobre la representación de datos estadísticos: estudios de casos con profesores de Estadística en carreras de Psicología y Educación*. Tesis doctoral en educación matemática. Universidad de Salamanca, España.

Poincaré, H. (1936). El azar. Artículo publicado originalmente en Lengua inglesa. *Journal of the American Statistical Association*, 31, 10-30.

Polya, G. (1982). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Rosental, M. M. (2005). *Diccionario filosófico*. Editorial Atenea Ltda. Colombia.

Ríos, D., Ríos, S. y Jiménez, J. (2000). *Simulación Métodos y Aplicaciones.* Santafé de Bogotá: Ed. Alfaomega.

Ross, Sh. (1999). *Simulación*. United States of America: Prentice Hall.

Serrano, L. (1996). Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad. *Unpublished Ph. D. dissertation, Universidad de Granada, Espanha*.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Research*, *15*(2), 4-14.

Shulman, S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reforms. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Stohl, H. & Tarr, J. (2002). Developing Notions of Inference using probability simulation tools. *Journal of mathematics Behavior*, 21 (3), 319-337.Disponible en: http://www.probexplorer.com/Articles\JMB2002Stohl&Tarr.pdf

Stohl, H. (2005), "Probability and Teacher Education and Development", En G. Jones (ed.), *Exploring probability in school: Challenges for the teaching and learning*, Nueva York, NY, Springer Verlag, pp. 345-366.

Turing, A. (1950). Máquinas de calcular e inteligencia [Calculate Machines and intelligence]. En A. Amderson (Ed.), *Controversia sobre mentes y máquinas* (p. 56). Barcelona: Tusquets.

Valdivieso, M. A. (2010). *Probabilidad Básica y distribuciones. Apoyo al estudio independiente*. Tunja: Impresiones Jotamar.