"Revista Virtual Universidad Católica del Norte". No. 31, (septiembre-diciembre de 2010, Colombia), acceso: [http://revistavirtual.ucn.edu.co/], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias (B), Latindex, EBSCO Information Services, Redalyc y en el Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa (IRESIE) de la Universidad Autónoma de México [pp.**338-362**]

Aplicaciones de la geometría del doblado de papel a las secciones cónicas[1]

Applications of paper folding geometry in conic sections

Application de la géométrie du plié de papier aux sections coniques

Zaida Margot Santa Ramírez
Licenciada en Matemáticas y Física
Estudiante de Maestría en Educación
Universidad de Antioquia
Correo: zsanta@ayura.udea.edu.co

Carlos Mario Jaramillo López
Doctor en Ciencias Matemáticas
Profesor Titular Departamento de Matemáticas
Universidad de Antioquia
Correo: cama@matematicas.udea.edu.co

Tipo de artículo: Artículo corto (avance de investigación)
Recepción: 2010-04-08
Revisión: 2010-08-27
Aprobación: 2010-09-01

[1] Este artículo es producto del trabajo de investigación: *Las secciones cónicas a través de la geometría del doblado de papel en el contexto de van Hiele*, que se está desarrollando en el marco del programa de Maestría en Educación, en la línea de matemáticas, de la Universidad de Antioquia. Es un documento de reflexión que pretende divulgar una manera alternativa de enseñar conceptos geométricos mediante el doblado de papel.

"Revista Virtual Universidad Católica del Norte". No. 31, (septiembre-diciembre de 2010, Colombia), acceso: [http://revistavirtual.ucn.edu.co/], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias (B), Latindex, EBSCO Information Services, Redalyc y en el Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa (IRESIE) de la Universidad Autónoma de México [pp.**338-362**]

Contenido

Resumen
El doblado de papel permite hacer construcciones tan precisas como las hechas con regla y compás; por eso, en los últimos años se han venido usando los axiomas propuestos por Humiaki Huzita y Koshiro Hatori, para fundamentar esta nueva geometría del doblado de papel, alterna a la geometría euclidiana. El presente artículo pretende formalizar algunos conceptos primitivos necesarios en las construcciones geométricas mediante el doblado de papel y, a su vez, desarrollar una propuesta alternativa para construir y deducir conceptos correspondientes a las secciones cónicas: circunferencia, elipse, hipérbola y parábola.

Palabras clave
Axiomas de Huzita – Hatori, Doblado de papel, Geometría, Secciones cónicas.

Abstract
Paper folding allows doing constructions as accurate as those made by ruler and compass. Then in recent years, the axioms proposed by Humiaki Huzita and Koshiro Hatori have been used and developed for supporting this new paper folding geometry alternates to Euclidean geometry. This article seeks to formalize some primitive concepts needed in the geometric constructions by paper folding and, in turn, it develops an alternative approach to construct and derive the concepts of each conic section: circle, ellipse, hyperbola and parabola.

"Revista Virtual Universidad Católica del Norte". No. 31, (septiembre-diciembre de 2010, Colombia), acceso: [http://revistavirtual.ucn.edu.co/], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias (B), Latindex, EBSCO Information Services, Redalyc y en el Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa (IRESIE) de la Universidad Autónoma de México [pp.**338-362**]

Keywords
Conic sections, Geometry, Huzita – Hatori Axioms, Paper folding.

Résumé
Le plié du papier nous permet faire constructions si précises comme ces construites à la règle et au compas ; pour ca, pendant les derniers ans, les axiomes proposes par Humiaki Huzita et Koshiro Hatori ont été utilises pour fonder cette nouvelle géométrie pour le plie du papier, qui est un alternatif a la géométrie euclidienne. Cet article essaye d'officialiser quelques concepts primitifs qui sont nécessaires dans les constructions géométriques grâce à le plie du papier, et a son tour, développer une proposition alternative pour la construire et déduire concepts correspondants aux sections coniques : circonférence, ellipse, hyperbole et parabole.

Mots-clés
Axiomes de Huzita-Hatori, Plié du papier, Géométrie, Sections coniques

1. Introducción

En el campo educativo, el doblado de papel se ha venido consolidando como una alternativa para mejorar el razonamiento en el área de la geometría, debido principalmente a su carácter visual y experimental, que le permite al estudiante no sólo manipular una hoja de papel para hacer unos dobleces determinados, sino también para visualizar algunos conceptos geométricos, además, justificar de manera formal las construcciones elaboradas, usando un sistema axiomático. Esta idea la fundamenta Royo (2002) cuando afirma que: "el ejercicio de doblar papel se puede usar con fines pedagógicos para estudiar e ilustrar la geometría elemental plana. La clave radica en interpretar geométricamente qué se está haciendo cuando se dobla el papel" (p. 186).

Dado que el doblado de papel permite hacer construcciones tan precisas como las elaboradas con regla y compás, en los últimos años se ha venido fundamentando un sistema axiomático, paralelo al de la geometría euclidiana, que permite justificar las construcciones hechas con papel. Esta nueva geometría, denominada *geometría del doblado de papel*, tiene sus raíces en los seis axiomas postulados por el ítalo-japonés Humiaki Huzita, en el *First International Meeting of Origami Science and Technology* celebrado

"Revista Virtual Universidad Católica del Norte". No. 31, (septiembre-diciembre de 2010, Colombia), acceso: [http://revistavirtual.ucn.edu.co/], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias (B), Latindex, EBSCO Information Services, Redalyc y en el Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa (IRESIE) de la Universidad Autónoma de México [pp.**338-362**]

en el año 1989 y en el séptimo axioma postulado por el japonés Koshiro Hatori (2003).

Basados en el desarrollo de algunos talleres con maestros y/o estudiantes en el marco de encuentros regionales y nacionales (II Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas, Medellín, 2010; ASOCOLME, Pasto, 2009; XVI Congreso Nacional de Matemáticas, Medellín, 2007) y en el trabajo de investigación que estamos adelantando, podemos afirmar que el sistema axiomático del doblado de papel es consistente, coherente y plausible desde el punto de vista matemático, teniendo en cuenta las siguientes condiciones de Cardozo, Elejalde y López (2001):

Suficiencia: deben explicitarse las definiciones, postulados y teoremas básicos que permitan deducir nuevos hechos geométricos.

Independencia: ningún postulado, en este caso axioma, se debe deducir de otro.

Compatibilidad: dos axiomas no deben llevar a deducciones contradictorias.

De acuerdo con las condiciones anteriores, proponemos unos conceptos básicos o primitivos en correspondencia con los axiomas de Huzita - Hatori para poder así, garantizar la existencia del sistema axiomático de la *geometría del doblado de papel* y fundamentar del rigor geométrico correspondiente, las construcciones realizadas mediante el doblado.

2. Conceptos primitivos de la geometría del doblado de papel

En la geometría del doblado de papel establecemos como conceptos primitivos *el doblez*, *el punto* y *la hoja de papel*, de la misma manera que en la geometría euclidiana se establecen el punto, la recta y el plano.

Doblez: de manera análoga a la recta, hecho en un pedazo de papel que aparece tanto al anverso como al reverso de este, se considerará como un concepto primitivo no definido, el cual está estrechamente relacionado con un segmento de línea recta, porque un pedazo de papel es limitado; pero se enfatizará que este doblez representa de manera abstracta una línea recta.

Punto: es un concepto no definido. Sin embargo, se establece una relación directa de manera natural con la intersección de dos dobleces o con las esquinas (ángulos) de la hoja de papel.

Sin pérdida de generalidad, en algunos casos, los puntos se van a asumir de manera intuitiva como la marca más pequeña que se puede dibujar con un lápiz. Es decir, un punto puede ser dibujado o construido en la hoja de papel.

Hoja de papel: una cara de la hoja de papel se puede tomar como una porción del plano. Por lo tanto, tiene límites y es finito, pero puede ser una representación abstracta de un plano infinito.

Por lo tanto, podemos afirmar que en una hoja de papel se pueden construir infinitos segmentos de recta que pasan por un punto, rectas perpendiculares a otras, la bisectriz de un ángulo, la mediatriz de un segmento…; se puede trisecar un ángulo, hacer mostraciones (Monsalve & Jaramillo, 2003) de algunos productos notables, el teorema de Pitágoras, e incluso encontrar la media y extrema razón de un segmento.

3. Axiomas[2] o postulados de la geometría del doblado de papel[3]

Hemos notado que algunos de los seis axiomas presentados por el ítalo-japonés Humiaki Huzita (1989) y el séptimo presentado por el japonés Koshiro Hatori (2003), tienen restricciones importantes, que es necesario mencionar en su formulación inicial, para poder establecer que el sistema axiomático de la geometría del doblado de papel, cumpla con las tres condiciones: suficiencia, independencia y compatibilidad.

Por lo tanto, teniendo como referencia los seis axiomas de Huzita (1989) y el séptimo de Hatori (2003) (Lang, 1996 – 2003), y en correspondencia con los conceptos primitivos antes establecidos, se fundamenta el sistema axiomático del doblado de papel, de la siguiente manera:

---

[2] La traducción de los Axiomas de Huzita – Hatori es una versión libre realizada por los autores.

[3] Las construcciones que se presentan en el artículo fueron elaboradas en el asistente geométrico RyC, con el fin de facilitar la visualización de los hechos geométricos, dado que simulan el mosaico de pliegues producto del doblado de papel.

CATÓLICA DEL NORTE ®
Fundación Universitaria
Pioneros en educación virtual

"Revista Virtual Universidad Católica del Norte". No. 31, (septiembre-diciembre de 2010, Colombia), acceso: [http://revistavirtual.ucn.edu.co/], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias (B), Latindex, EBSCO Information Services, Redalyc y en el Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa (IRESIE) de la Universidad Autónoma de México [pp.**338-362**]

Axioma 1: dados dos puntos P_1 *y* P_2*,* se puede hacer un doblez que pasa a través de ellos (Lang, 1996 – 2003, p. 38)*.*

Este axioma es análogo al primer axioma de Euclides "por dos puntos pasa una única recta".

En este sistema axiomático se considerará el doblez construido como único, a pesar de que se pueda visualizar tanto al anverso como al reverso de la hoja; como esta unicidad del doblez debe ser consistente con el concepto primitivo *doblez*, antes mencionado, entonces proponemos el enunciado del axioma 1 de la siguiente manera: "Dados dos puntos distintos P_1 *y* P_2, existe un único doblez que pasa a través de ellos".

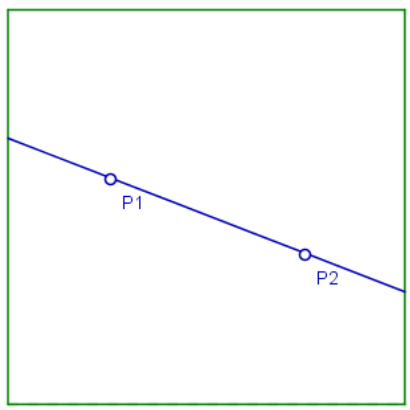

Figura 1. Doblez resultante de la aplicación del axioma 1.

Axioma 2: dados dos puntos P_1 *y* P_2, se puede hacer un doblez que lleva a P_1 *sobre* P_2 (p. 38)*.*

Este axioma se relaciona con la construcción hecha con regla y compás del lugar geométrico de una mediatriz, es decir, una perpendicular al segmento $\overline{P_1P_2}$ que pasa por su punto medio. Como el doblez es único y dado que los puntos deben ser distintos para garantizar la existencia del mismo, entonces proponemos el enunciado del axioma 2 de la siguiente manera: "Dados dos puntos distintos P_1 *y* P_2, existe un único doblez que lleva a P_1 *sobre* P_2".

CATÓLICA DEL NORTE®
Fundación Universitaria
Pioneros en educación virtual

"Revista Virtual Universidad Católica del Norte". No. 31, (septiembre-diciembre de 2010, Colombia), acceso: [http://revistavirtual.ucn.edu.co/], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias (B), Latindex, EBSCO Information Services, Redalyc y en el Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa (IRESIE) de la Universidad Autónoma de México [pp.**338-362**]

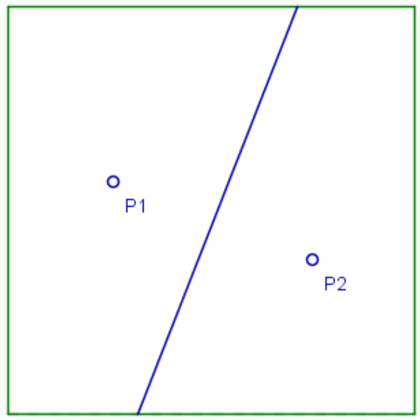

Figura 2. Doblez resultante de la aplicación del axioma 2.

Axioma 3: dadas dos líneas l_1 *y* l_2*,* se puede hacer un doblez que pone *a* l_1 *sobre* l_2 (p. 38).
Este axioma es análogo a la construcción hecha con regla y compás del lugar geométrico de una bisectriz. Por lo tanto, se cumple que:

Si l_1 es paralela a l_2, entonces se hace referencia a una paralela que equidista de los dos dobleces. El doblez en este caso sería único.

Si l_1 no es paralela a l_2, entonces se hace referencia a la bisectriz del ángulo que forman los respectivos dobleces al intersecarse. Si estos se intersecan en la hoja de papel, se pueden encontrar dos dobleces. Si estos no se intersecan, existen los dos dobleces, pero uno de ellos está por fuera del plano determinado por la hoja de papel.

Como en el axioma inicial establecido por Huzita – Hatori, no se tienen en cuenta estas restricciones, y además, en el caso en que las líneas fueran iguales, no existiría el doblez, entonces, proponemos el enunciado del axioma 3 de la siguiente manera: "Dados dos dobleces distintos l_1 *y* l_2, existen dos dobleces o un doblez que pone a l_1 exactamente sobre l_2".

"Revista Virtual Universidad Católica del Norte". No. 31, (septiembre-diciembre de 2010, Colombia), acceso: [http://revistavirtual.ucn.edu.co/], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias (B), Latindex, EBSCO Information Services, Redalyc y en el Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa (IRESIE) de la Universidad Autónoma de México [pp.**338-362**]

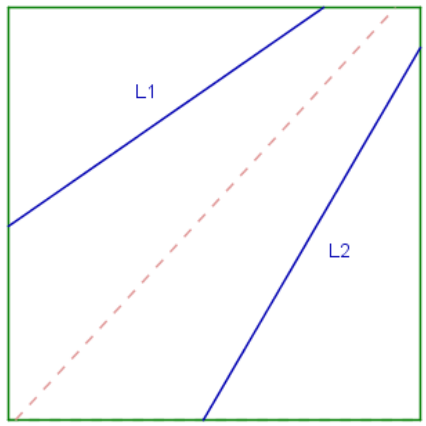

Figura 3. Doblez (punteado) resultante de la aplicación del axioma 3.

Axioma 4: dado un punto P_1 *y una línea* l_1, se puede hacer un doblez que pone a l_1 sobre sí misma y pasa por P_1 (p. 38).

Este axioma se relaciona con la construcción hecha con regla y compás de una perpendicular a una recta que pasa por un punto, que puede ser exterior o pertenecer a la recta. Como el doblez es único, entonces proponemos el enunciado del axioma 4 de la siguiente manera: "Dado un doblez l_1 y un punto P_1, existe un único doblez que pone a l_1 sobre sí misma y pasa por P_1"

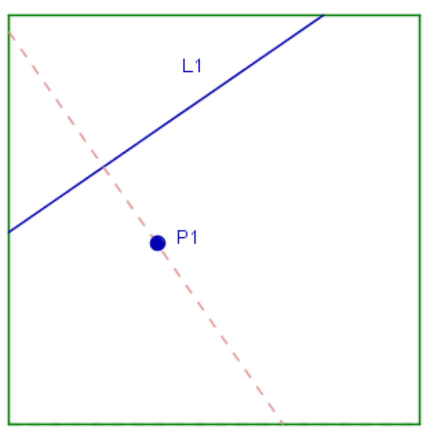

Figura 4. Doblez (punteado) resultante de la aplicación del axioma 4.

“Revista Virtual Universidad Católica del Norte”. No. 31, (septiembre-diciembre de 2010, Colombia), acceso: [http://revistavirtual.ucn.edu.co/], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias (B), Latindex, EBSCO Information Services, Redalyc y en el Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa (IRESIE) de la Universidad Autónoma de México [pp.**338-362**]

Axioma 5: dados dos puntos P_1 *y* P_2 y una línea l_1, se puede hacer un doblez que pone a P_1 sobre l_1 y pasa por P_2 (p. 38).

El punto P_2 se mantiene fijo, mientras que P_1 debe recorrer una trayectoria circular hasta coincidir con un punto que pertenezca a l_1; luego, P_2 es el centro de una circunferencia hipotética de radio $\overline{P_1P_2}$. En la búsqueda del doblez, se presentan entonces tres posibilidades: dos soluciones, una solución o ninguna, de acuerdo con las posiciones relativas de la circunferencia hipotética y el doblez l_1: que el doblez sea secante, sea tangente o que simplemente no corte la circunferencia.

Como en el axioma inicial no se consideraron estas restricciones, entonces, proponemos el enunciado del axioma 5 de la siguiente manera: “Dados un doblez l_1 y dos puntos P_1 *y* P_2, se puede encontrar un doblez, dos dobleces o ningún doblez, si se lleva el punto P_1 sobre l_1 y se garantiza que el doblez pase por P_2”.

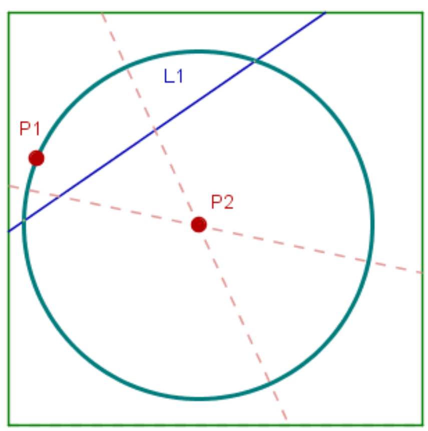

Figura 5. Dobleces (punteados) resultantes de la aplicación del axioma 5.

Axioma 6: dados dos puntos P_1 *y* P_2 y dos líneas l_1 *y* l_2, se puede hacer un doblez que pone a P_1 sobre l_1 y a P_2 sobre l_2 (p. 38).

Según Huzita (1989), la aplicación de este axioma se relaciona directamente con la solución de un problema de cálculo, el cual consiste en encontrar una recta tangente a dos curvas, en este caso a dos parábolas. De hecho, la aplicación sucesiva del axioma 2 con un doblez l_1 y un punto exterior, genera el lugar geométrico de la parábola (Geretschläger, 1995). Por lo tanto, el axioma tendría varias restricciones, que se presentan en la

CATÓLICA DEL NORTE ®
Fundación Universitaria
Pioneros en educación virtual

"Revista Virtual Universidad Católica del Norte". No. 31, (septiembre-diciembre de 2010, Colombia), acceso: [http://revistavirtual.ucn.edu.co/], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias (B), Latindex, EBSCO Information Services, Redalyc y en el Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa (IRESIE) de la Universidad Autónoma de México [pp.**338-362**]

siguiente tabla, de acuerdo con las posiciones relativas de los dobleces y de los puntos:

Tabla 1. Existencia de dobleces al aplicar el axioma 6.

Puntos P_1 y P_2 / Dobleces l_1 y l_2	Exteriores a la región que determinan los dobleces	Interiores a la región que determinan los dobleces	Exterior e interior
Paralelos	Hay dos soluciones. Con estas condiciones sucede algo muy curioso: las dos soluciones, $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_1'P_2'}$[4], $\overline{P_1''P_2''}$[5] convergen en un mismo punto.	No hay solución si la distancia de $\overline{P_1P_2}$ es menor que la distancia entre los dobleces l_1 y l_2. Si la distancia de $\overline{P_1P_2}$ es igual o mayor que la distancia entre los dobleces l_1 y l_2, hay una solución.	No hay solución si la distancia de $\overline{P_1P_2}$ es menor que la distancia entre los dobleces l_1 y l_2. Si la distancia de $\overline{P_1P_2}$ es igual o mayor que la distancia entre los dobleces l_1 y l_2, puede ocurrir: si el eje focal es igual, hay dos soluciones; si el eje focal es diferente, hay dos soluciones, una de las cuales es posible que quede por fuera del plano (hoja de papel)
No paralelos	Hay tres soluciones. Es posible que en la hoja no se	Hay una solución, que puede estar dentro o fuera	Hay dos soluciones. Es posible que en la hoja no se pueda

[4] Los puntos P_1' y P_2' son los puntos donde se ponen P_1 y P_2 cuando se encuentra el primer doblez solución del axioma 6.

[5] Los puntos P_1'' y P_2'' son los puntos donde se ponen P_1 y P_2 cuando se encuentra el segundo doblez solución del axioma 6.

"Revista Virtual Universidad Católica del Norte". No. 31, (septiembre-diciembre de 2010, Colombia), acceso: [http://revistavirtual.ucn.edu.co/], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias (B), Latindex, EBSCO Information Services, Redalyc y en el Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa (IRESIE) de la Universidad Autónoma de México [pp.**338-362**]

	pueda visualizar que un punto queda sobre el doblez, porque ocurre por fuera del plano determinado por dicha hoja.	del plano determinado por la hoja de papel.	visualizar que un punto queda sobre el doblez, porque ocurre por fuera del plano (hoja de papel).

Aparte de las restricciones establecidas en la tabla anterior, para garantizar la existencia del doblez, el punto P_1 debe ser exterior al doblez l_1; de la misma manera el punto P_2 debe ser exterior al doblez l_2, para poder certificar la existencia de las dos parábolas.

En todas las aplicaciones del axioma seis, observamos que al unir el punto P_1 con su respectivo $P_1{}'$, y P_2 con $P_2{}'$, los segmentos $\overline{P_1P_1{}'}$ y $\overline{P_2P_2{}'}$ son paralelos. Esto mismo sucede con los segmentos $\overline{P_1P_1{}''}$ y $\overline{P_2P_2{}''}$, en el caso en que haya dos soluciones o con los segmentos $\overline{P_1P_1{}'''}$ y $\overline{P_2P_2{}'''}$ en el caso en que haya tres soluciones.

Es importante tener en cuenta que los axiomas son generales, pero la existencia de las soluciones (los dobleces), está condicionada al tamaño de la hoja de papel, dado que en muchas ocasiones los dobleces sí existen pero por fuera de la porción del plano determinado por dicha hoja.

Con las restricciones establecidas anteriormente, proponemos el enunciado del axioma 6 de la siguiente manera: "Dados dos dobleces l_1 y l_2 y dos puntos P_1 *y* P_2 exteriores a l_1 y a l_2 respectivamente, se puede encontrar un doblez, dos dobleces, tres dobleces o ningún doblez, si se pone el punto P_1 sobre el doblez l_1 y a su vez, el punto P_2 sobre el doblez l_2".

"Revista Virtual Universidad Católica del Norte". No. 31, (septiembre-diciembre de 2010, Colombia), acceso: [http://revistavirtual.ucn.edu.co/], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias (B), Latindex, EBSCO Information Services, Redalyc y en el Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa (IRESIE) de la Universidad Autónoma de México [pp.**338-362**]

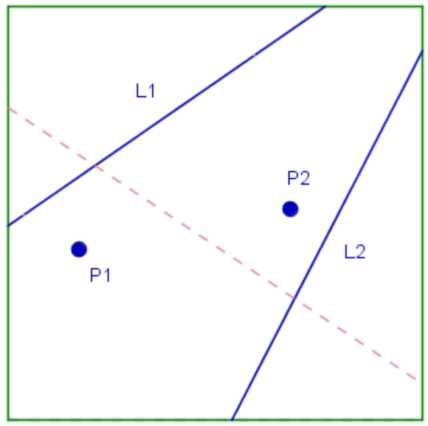

Figura 6. Doblez (punteado) resultante de la aplicación del axioma 6.

Axioma 7: dados un punto P_1 y dos líneas l_1 *y* l_2*,* se puede hacer un doblez perpendicular a l_2 que ponga el punto P_1 sobre la línea l_1 (Lang, 1996 – 2003, p. 39)*.*

Este axioma consiste en encontrar un doblez que sea tangente a la parábola cuya directriz es l_1 y cuyo foco es P_1, y a su vez, sea perpendicular a la recta que determina el doblez l_2. Según Lang (1996 – 2003), este axioma es solución de una ecuación de segundo grado (p. 39). Por lo tanto, puede tener dos soluciones reales distintas, dos soluciones reales iguales o no tener solución en los reales. Las condiciones establecidas por el axioma, nos permiten determinar las siguientes restricciones:

- Si los dobleces l_1 y l_2 son paralelos, no es posible encontrar el doblez, dado que cualquier perpendicular a l_2 es secante de la parábola con foco P_1 y directriz l_1 (no hay solución en los reales).
- Si los dobleces l_1 y l_2 no son paralelos, existe un único doblez (dos soluciones reales iguales).
- El punto P_1 debe ser exterior al doblez l_1, de lo contrario, no se podría hablar del lugar geométrico de la parábola.

Es importante tener en cuenta que el segmento $\overline{P_1P_1'}$ es paralelo a la recta l_2 (P_1' es el punto de la recta l_1 donde se pone el punto P_1 cuando se aplica el axioma siete) como consecuencia del axioma dos.

Con miras a reformular el sistema axiomático de la geometría del doblado de papel y teniendo en cuenta las restricciones mencionadas, proponemos el

“Revista Virtual Universidad Católica del Norte”. No. 31, (septiembre-diciembre de 2010, Colombia), acceso: [http://revistavirtual.ucn.edu.co/], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias (B), Latindex, EBSCO Information Services, Redalyc y en el Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa (IRESIE) de la Universidad Autónoma de México [pp.**338-362**]

enunciado del axioma 7 de la siguiente manera: “Dados dos dobleces l_1 y l_2 y un punto P_1 exterior a l_1, se puede encontrar un doblez o ningún doblez, que sea perpendicular a l_2 y que ponga el punto P_1 sobre el doblez l_1”.

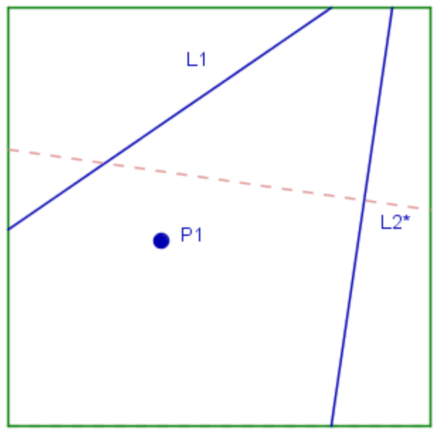

Figura 7. Doblez (punteado) resultante de la aplicación del axioma 7.

De acuerdo con lo anterior, se considera que los axiomas de Huzita – Hatori acompañados de las reformulaciones propuestas, cumplen con las condiciones de independencia y compatibilidad, puesto que un axioma no puede inferirse del otro y no llevan a deducciones contradictorias. De hecho, Robert Lang (1996 – 2003) demuestra que este conjunto de axiomas es completo y que son todas las posibles combinaciones que definen un único doblez por la alineación de puntos con segmentos de recta finitos (p. 39). Sin embargo, para que la geometría del doblado de papel sea verdaderamente un sistema axiomático, se debe cumplir con la condición de suficiencia. Aún hace falta establecer una serie de teoremas que permitan deducir nuevos hechos geométricos, y hasta el momento, estos al parecer, todavía no han sido estudiados, dado que apenas las investigaciones en esta área, están iniciando.

Como aplicación de la anterior axiomática reformulada, establecida para la geometría del doblado de papel y con el ánimo de iniciar estudios que demuestren su importancia en la posibilidad de deducir nuevos hechos geométricos, se propone la construcción de las secciones cónicas (circunferencia, elipse, parábola e hipérbola), aplicando la axiomática del doblado de papel y en el contexto de la misma, se podrán definir correspondientemente como lugares geométricos.

"Revista Virtual Universidad Católica del Norte". No. 31, (septiembre-diciembre de 2010, Colombia), acceso: [http://revistavirtual.ucn.edu.co/], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias (B), Latindex, EBSCO Information Services, Redalyc y en el Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa (IRESIE) de la Universidad Autónoma de México [pp.**338-362**]

4. Construcción de las secciones cónicas con doblado de papel

Con el doblado de papel es posible construir las secciones cónicas y definirlas como lugares geométricos. Así lo mencionan diferentes autores como Row (1966), Johnson (1975), del Río (1996), Ibañez (2002), Czwienczek (2009), entre otros.

4.1 Circunferencia

Según Row (1966), no es posible construir, de manera directa, una circunferencia con el doblado de papel (p. VI), pero sí es posible determinar puntos discretos de la misma y a partir de esta construcción, definirla como lugar geométrico. Para ello, es necesario partir de una hoja de papel de forma cuadrada.

Utilizando el primer axioma, se construyen sus dos diagonales; luego se aplica el axioma 3 con cada par de lados paralelos de dicho cuadrado, es decir, se construyen paralelas que equidisten de los lados opuestos respectivamente.

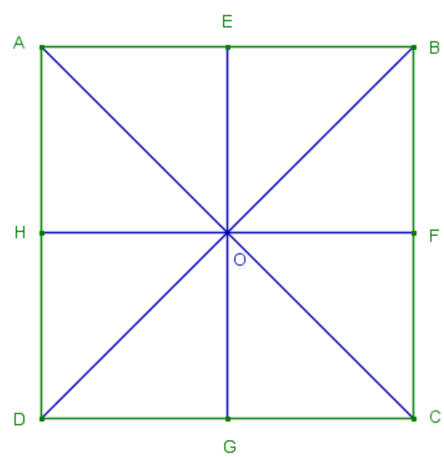

Figura 8. Construcción de una circunferencia.

El anterior proceso de construcción consistió en generar cuatro dobleces que convergen en el centro (en el punto O). Si se aplica el axioma 3 llevando el doblez $\overline{AC}$ sobre el doblez $\overline{EG}$, entonces los ángulos $\angle AOE$ y $\angle GOC$ quedan bisecados. Usando el mismo procedimiento, se bisecan todos los demás ángulos interiores.

"Revista Virtual Universidad Católica del Norte". No. 31, (septiembre-diciembre de 2010, Colombia), acceso: [http://revistavirtual.ucn.edu.co/], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias (B), Latindex, EBSCO Information Services, Redalyc y en el Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa (IRESIE) de la Universidad Autónoma de México [pp.**338-362**]

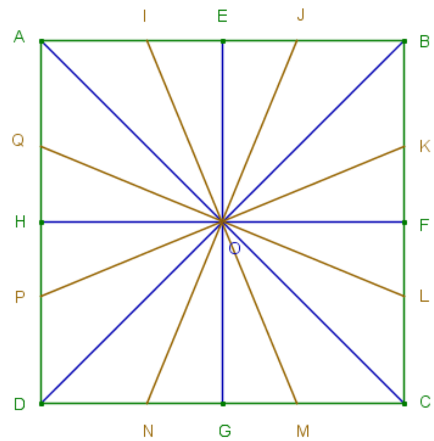

Figura 9. Construcción de una circunferencia.

Posteriormente, se aplica nuevamente el axioma 3 con dos dobleces consecutivos, para bisecar los 16 ángulos interiores que se forman en el punto O.

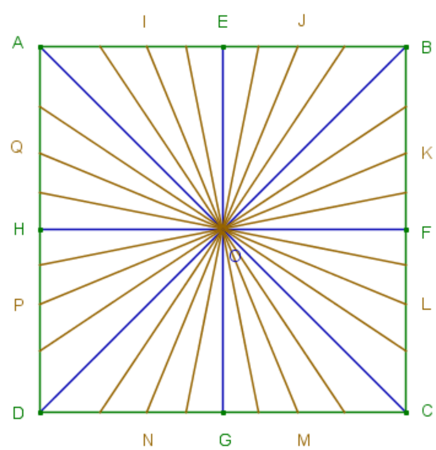

Figura 10. Construcción de una circunferencia.

Se dibuja un punto P en uno de los dobleces (diferente del punto O) cerca al borde de la hoja.

Con un proceso de traslación del punto a los dobleces siguientes, se garantiza que la distancia al punto O sea constante.

"Revista Virtual Universidad Católica del Norte". No. 31, (septiembre-diciembre de 2010, Colombia), acceso: [http://revistavirtual.ucn.edu.co/], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias (B), Latindex, EBSCO Information Services, Redalyc y en el Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa (IRESIE) de la Universidad Autónoma de México [pp.**338-362**]

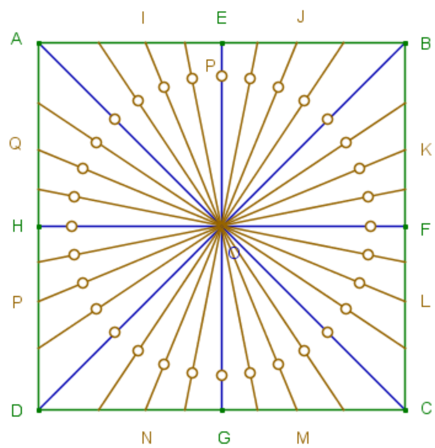

Figura 11. Definición de la circunferencia.

Este conjunto de puntos discretos permite intuir la noción de circunferencia, círculo, diámetro y radio. Por lo tanto, a partir de esta construcción, se puede definir el lugar geométrico circunferencia como: el conjunto de todos los puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro (Zill y Dewar, 1992).

El concepto de circunferencia es fundamental para definir el lugar geométrico de la elipse y el lugar geométrico de la hipérbola, pues ambas construcciones se basan en dicho concepto. Incluso, esta relación también se percibe en sus ecuaciones algebraicas, pero esto no es objeto de discusión en este trabajo.

4.2 Elipse

Para construir una elipse, es necesario partir de una hoja de papel de forma cuadrada o rectangular y, según Ibáñez (2002), dibujar en su interior una circunferencia; se recorta y se ubican el centro O y un punto P en su interior, diferente del centro (p. 20, 22); después de haber construido muchos puntos alrededor de la circunferencia, se aplica sucesivamente el axioma 2 con dichos puntos (P_n) y el punto P: "dados dos puntos existe un único doblez que pone al punto P_n sobre el punto P".

"Revista Virtual Universidad Católica del Norte". No. 31, (septiembre-diciembre de 2010, Colombia), acceso: [http://revistavirtual.ucn.edu.co/], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias (B), Latindex, EBSCO Information Services, Redalyc y en el Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa (IRESIE) de la Universidad Autónoma de México [pp.**338-362**]

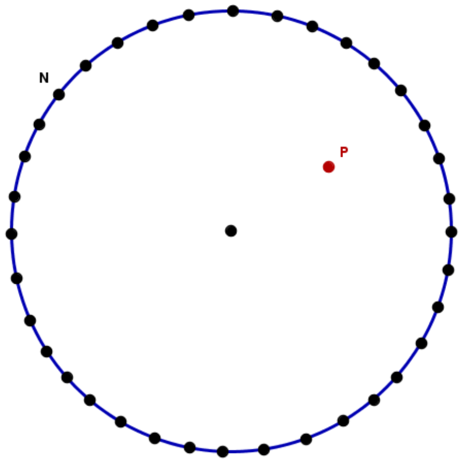

Figura 12. Construcción de una elipse.

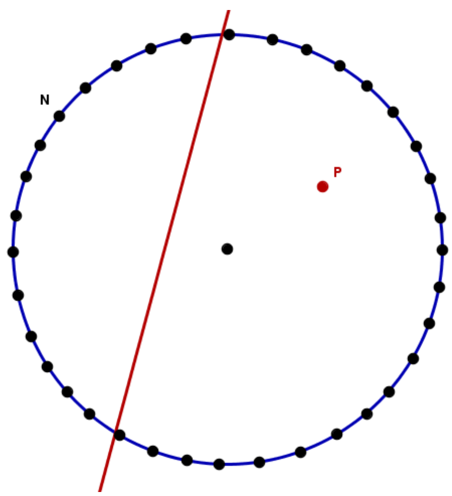

Figura 13. Construcción de una elipse.

Al finalizar todos los dobleces, la sección cónica se forma como la "envolvente de una familia de rectas" (Ibánez, 2002, p. 22). Así:

"Revista Virtual Universidad Católica del Norte". No. 31, (septiembre-diciembre de 2010, Colombia), acceso: [http://revistavirtual.ucn.edu.co/], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias (B), Latindex, EBSCO Information Services, Redalyc y en el Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa (IRESIE) de la Universidad Autónoma de México [pp.**338-362**]

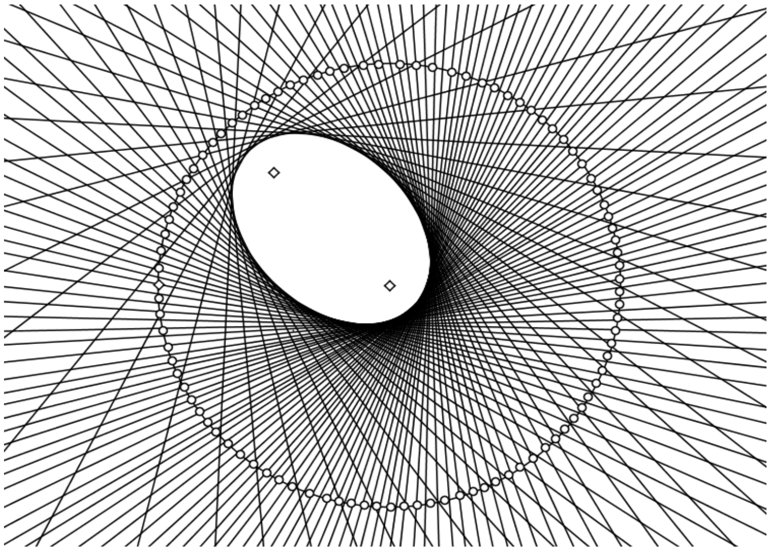

Figura 14. Construcción de una elipse.

La anterior construcción permite llegar a la definición de la elipse como lugar geométrico, de la siguiente manera:

Suponga que O y P son los focos de la elipse, y N uno de los puntos de la circunferencia. Sea M el punto donde se intersecan el radio $\overline{NO}$ y la mediatriz del segmento $\overline{NP}$ (axioma 2). Nótese que $\overline{MP}$ es congruente con $\overline{NM}$, como consecuencia del segundo axioma.

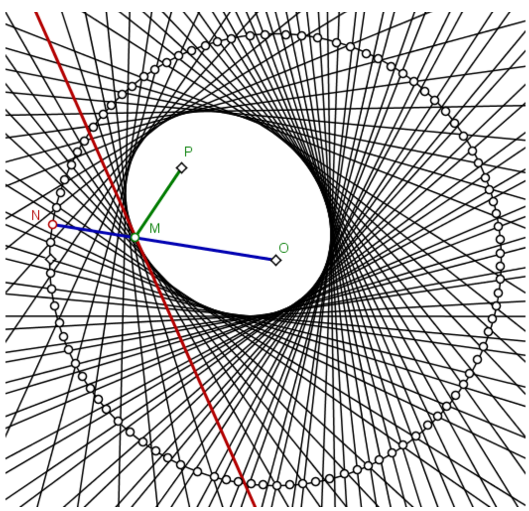

Figura 15. Definición de la elipse.

"Revista Virtual Universidad Católica del Norte". No. 31, (septiembre-diciembre de 2010, Colombia), acceso: [http://revistavirtual.ucn.edu.co/], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias (B), Latindex, EBSCO Information Services, Redalyc y en el Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa (IRESIE) de la Universidad Autónoma de México [pp.**338-362**]

Luego, $\overline{OM}+\overline{MP}=r$, donde r es el radio de la circunferencia inicial de la que se partió para su construcción.

Por lo tanto, se puede concluir que la elipse es el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es una constante (Zill y Dewar, 1992).

4.3 Hipérbola

Para su construcción es necesario partir de una hoja de papel de forma rectangular y construir de nuevo una circunferencia. De acuerdo con Ibáñez (2002), "se ubican el centro O y un punto P exterior a ella" (p. 32); además, se deben dibujar muchos puntos alrededor de la circunferencia. Aplique sucesivamente el axioma 2 usando cada uno de los puntos dibujados (P_n) y el punto P: "dados dos puntos distintos existe un único doblez que lleva a P_n sobre P".

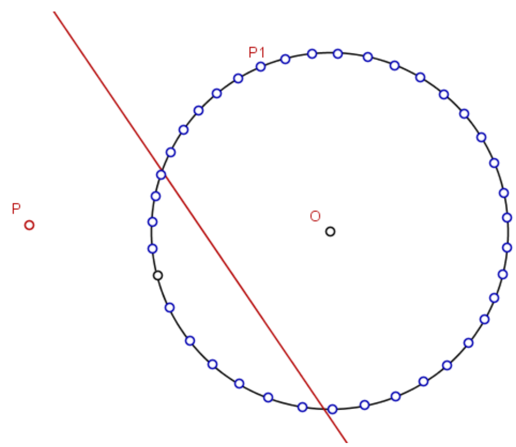

Figura 16. Construcción de una hipérbola.

Al finalizar todos los dobleces, la hipérbola se forma como la "envolvente de una familia de rectas tangentes" (Ibáñez, 2002, p. 34), así:

“Revista Virtual Universidad Católica del Norte”. No. 31, (septiembre-diciembre de 2010, Colombia), acceso: [http://revistavirtual.ucn.edu.co/], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias (B), Latindex, EBSCO Information Services, Redalyc y en el Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa (IRESIE) de la Universidad Autónoma de México [pp.**338-362**]

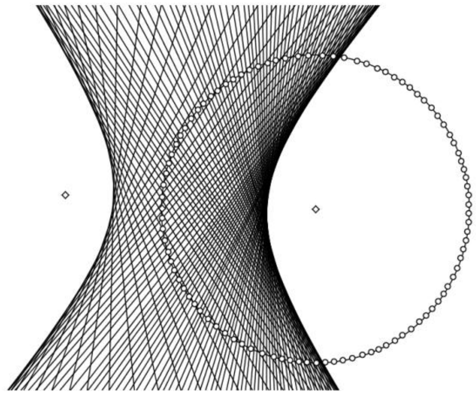

Figura 17. Construcción de una hipérbola.

La anterior construcción permite llegar a la definición de la hipérbola como lugar geométrico, de la siguiente manera:

Suponga que P y O son los focos de la hipérbola y Q, un punto de la circunferencia. Sea M el punto donde se intersecan el diámetro que pasa por el segmento $\overline{QO}$ y la mediatriz del segmento $\overline{PQ}$ (doblez formado por la aplicación del axioma 2).

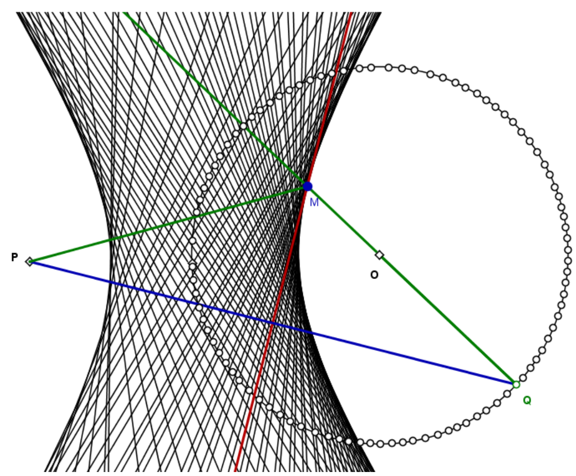

Figura 18. Definición de la hipérbola.

Note que $\overline{PM}$ es congruente con $\overline{MQ}$, por el segundo axioma. Luego, $\overline{PM} - \overline{OM} = r$, donde r es el radio de la circunferencia con la que se inició la construcción.

"Revista Virtual Universidad Católica del Norte". No. 31, (septiembre-diciembre de 2010, Colombia), acceso: [http://revistavirtual.ucn.edu.co/], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias (B), Latindex, EBSCO Information Services, Redalyc y en el Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa (IRESIE) de la Universidad Autónoma de México [pp.**338-362**]

Por lo tanto, se puede concluir que una hipérbola es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias entre dos puntos fijos llamados focos es constante (Zill y Dewar, 1992).

4.4 Parábola

Para realizar su construcción se parte del axioma 1 haciendo un doblez L y ubicando un punto P, exterior a este. Se dibujan la mayor cantidad de puntos posibles en el segmento de recta que determina el doblez y se nombra a uno de ellos Q. Después se aplica el axioma 2, de tal manera que se haga un doblez que ponga el punto P sobre el punto Q. Este procedimiento se repite para todos los puntos que se dibujaron en el doblez L (Geretschläger, 1995).

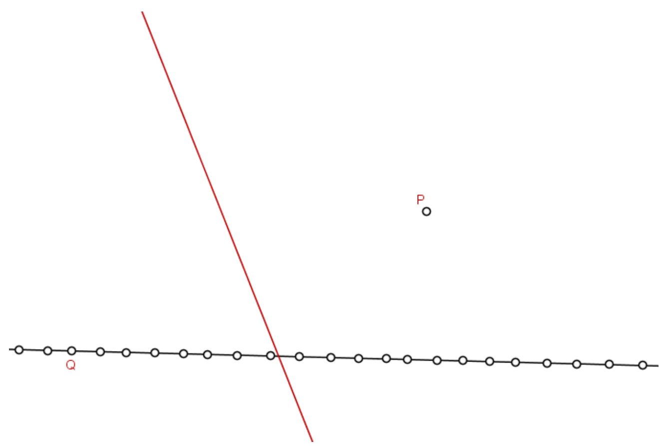

Figura 19. Construcción de una parábola.

Al finalizar todos los dobleces, la parábola se forma como la "envolvente de una familia de rectas tangentes" (Ibáñez, 2002, p. 26), así:

"Revista Virtual Universidad Católica del Norte". No. 31, (septiembre-diciembre de 2010, Colombia), acceso: [http://revistavirtual.ucn.edu.co/], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias (B), Latindex, EBSCO Information Services, Redalyc y en el Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa (IRESIE) de la Universidad Autónoma de México [pp.**338-362**]

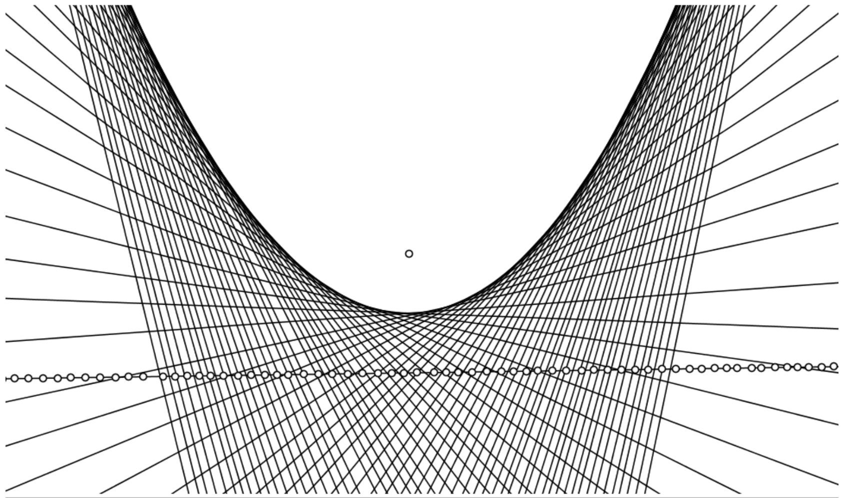

Figura 20. Construcción de una parábola.

La anterior construcción permite llegar a la definición de la parábola como lugar geométrico, de la siguiente manera:

Suponga que P es el foco de la parábola y L su directriz. Sea K el doblez que se formó cuando se aplicó el axioma 2. Al aplicar el axioma 4, se puede hacer un doblez perpendicular a L y que pase por el punto Q. Este doblez se corta con el doblez K en el punto R. Note que el segmento $\overline{PR}$ es congruente con el segmento $\overline{RQ}$ (por ser K la mediatriz del segmento $\overline{PQ}$, axioma 2).

"Revista Virtual Universidad Católica del Norte". No. 31, (septiembre-diciembre de 2010, Colombia), acceso: [http://revistavirtual.ucn.edu.co/], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias (B), Latindex, EBSCO Information Services, Redalyc y en el Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa (IRESIE) de la Universidad Autónoma de México [pp.**338-362**]

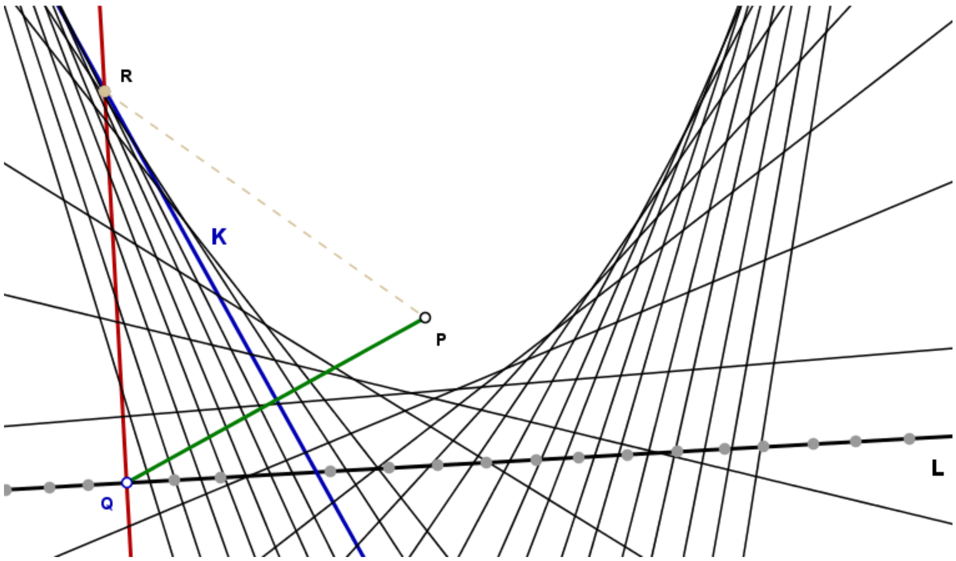

Figura 21. Definición de la parábola.

Por lo tanto, se puede concluir que la parábola es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo llamado foco y una línea recta llamada directriz (Zill & Dewar, 1992).

5. Conclusiones

Se puede afirmar que la geometría del doblado de papel se consolida como una propuesta didáctica alternativa para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría. En particular, mediante la axiomática del doblado, es posible proponer estrategias didácticas para la construcción de cada sección cónica y su definición como lugar geométrico. Incluso, se pueden hacer mostraciones (Monsalve & Jaramillo, 2003), de manera análoga, de hechos geométricos propios de la geometría euclidiana.

Por otro lado, Apolonio obtuvo las secciones cónicas haciendo cortes de un cono circular recto con un plano, pero no se preocupó de su utilidad (Boll, 1981). De la misma manera, la construcción con doblado de papel permite definir cada una de las cónicas, sin mostrar explícitamente sus aplicaciones en la solución de problemas prácticos. Sin embargo, se considera fundamental que el estudiante primero "reconozca y describa curvas o lugares geométricos" (MEN, 2003, p. 21) antes de "resolver problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas de manera algebraica" (p. 20).

"Revista Virtual Universidad Católica del Norte". No. 31, (septiembre-diciembre de 2010, Colombia), acceso: [http://revistavirtual.ucn.edu.co/], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias (B), Latindex, EBSCO Information Services, Redalyc y en el Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa (IRESIE) de la Universidad Autónoma de México [pp.**338-362**]

Para finalizar, es importante resaltar que las construcciones que se hicieron con el doblado de papel, sirven para definir cada una de las secciones cónicas como curvas o lugares geométricos, no para deducir la ecuación algebraica de segundo grado tal como se hace en la geometría analítica. Un trabajo posterior, que incluya coordenadas cartesianas, podría permitir que el estudiante relacione con mayor significado, dichas construcciones geométricas con sus respectivas ecuaciones.

6. Lista de referencias

Boll, M. (1981). *Historia de las matemáticas.* México: Diana.

Cardozo, C., Elejalde, R., & López, G. (2001). *De la lógica a las funciones*. Colombia: Universidad Pontificia Bolivariana.

Czwienczek, F. (2009). Estudio de la elipse con plegado de papel. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (18), 150 – 155.

Del Río, J. (1996). *Lugares geométricos. Cónicas.* España: Síntesis.

Geretschläger, R. (1995). Euclidean Constructions and the Geometry of Origami. *Mathematics Magazine*, (5), 357–371.

Johnson, D. (1975). *Matemáticas más fáciles doblando papel.* España: Distein.

Hatori, Koshiro (2003). Origami Construction. Recuperado el 30 de enero de 2010, del sitio web: http://origami.ousaan.com/library/conste.html

Huzita, H. (1989). Axiomatic development of origami geometry, *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*, p. 143-158.

Ibáñez, R. (2002). Secciones cónicas. *Sigma: Revista de Matemáticas*, (20), 12 – 38.

Lang, R. (1996 – 2003). Origami and Geometric Constructions. Recuperado el 4 de junio de 2006, del sitio web: http://www.langorigami.com/science/hha/origami_constructions.pdf

Lang, R. (2004 – 2010). Huzita Axioms. Recuperado el 30 de enero de 2010, del sitio web: http://www.langorigami.com/science/hha/hha.php4

"Revista Virtual Universidad Católica del Norte". No. 31, (septiembre-diciembre de 2010, Colombia), acceso: [http://revistavirtual.ucn.edu.co/], ISSN 0124-5821 - Indexada Publindex-Colciencias (B), Latindex, EBSCO Information Services, Redalyc y en el Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa (IRESIE) de la Universidad Autónoma de México [pp.**338-362**]

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas.* Bogotá: MEN.

Monsalve, O., & Jaramillo, C. (2003). El placer de doblar papel. Mostraciones y algunas aplicaciones matemáticas. *Revista Educación y Pedagogía, 15*(35), 11 – 25.

Royo, J. Matemáticas y papiroflexia. (2002). *Sigma: Revista de Matemáticas,* (21), 175 – 192.

Row, S. (1966). Geometric Exercises in Paper Folding. New York: Dover Publications.

Zill, D., & Dewar, J. (1992). *Álgebra y trigonometría.* México: McGraw-Hill.