Avance de investigación:

Elementos históricos, epistemológicos y didácticos para la construcción del concepto de función cuadrática

Yadira Marcela Mesa
Estudiante de Licenciatura en Educación Básica
con énfasis en Matemáticas.
Universidad de Antioquia
yadiramarcelamesa@yahoo.es

Jhony Alexánder Villa Ochoa
Especialista en Enseñanza de las Matemáticas
Magíster en Educación Matemática
Estudiante de doctorado en educación: Docencias de las matematicas
Universidad de Antioquia
javo@une.net.co

*Recepción: 2 de abril 2007
Aprobación: 19 de abril 2007

Contenido

Resumen. Este documento es un avance del proyecto de investigación desarrollado en cooperación entre la Universidad de Antioquia y el Instituto Tecnológico Metropolitano-Campus Castilla (Medellín). En él se pretende diseñar y validar una propuesta didáctica mediante la cual se pueda construir el concepto de función cuadrática vía la modelización de fenómenos de variación. Se dan a conocer los avances del proyecto en cuanto al rastreo histórico y la socialización de una situación didáctica de aprendizaje a la luz de la modelación matemática. Algunos elementos de este documento fueron socializados en el primer encuentro de estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en matemáticas y en el Octavo encuentro Colombiano de Matemática Educativa en la ciudad de Cali – Colombia.

Palabras y expresiones claves. Ecuación cuadrática, Función, Geometría Analítica, Modelación matemática, Modelización matemática

Introducción

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas ha sido un área de constante preocupación en las últimas décadas y a la cual muchos investigadores han dedicado grandes esfuerzos hasta lograr los desarrollos que actualmente se conocen en esta disciplina. Uno de estos alcances radica en el establecimiento de diferentes herramientas que sean de utilidad para desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes, entre ellas, se destaca el proceso de la modelización matemática. De un modo general la modelización matemática surge de la relación del hombre con el universo, lo cual le ha demandado el conocimiento del mismo para manipularlo con miras al beneficio humano. Por ende, cabe afirmar que las primeras manifestaciones matemáticas estuvieron relacionadas con el entorno. En esta primera parte del documento se presentarán los resultados de una indagación sobre los aspectos históricos y epistemológicos que estuvieron ligados a la consolidación del concepto de función cuadrática. La referencia a la historia como fuente de reflexión tiene un valor didáctico a la hora de pensar situaciones en el aula de clase.

Génesis histórica de las nociones cuadráticas

Las nociones cuadráticas han estado presentes en diferentes fases de la historia de las matemáticas. En nuestra revisión inicial hemos identificado tres grandes momentos:

1. Las ecuaciones
   El concepto de ecuación es uno de los más importantes del álgebra actual y ha estado presente a través de las historia en diversas culturas. Por ejemplo:

   a) Cultura Babilónica
   Características: los babilonios generaron estrategias de cálculo diferentes a las de los geómetras, pues se valieron más bien de la forma retórica, aunque no por eso se puede inferir que no hayan pensado geométricamente. Sin embargo, de haber sido este el caso, su trabajo no tuvo la suficiente trascendencia en comparación con el de los griegos que lo hicieron riguroso bajo el sistema axiomático.

   Situaciones presentadas: según Kline (1992), los babilonios resolvían problemas de ecuaciones como el siguiente: "Hallar un número tal que sumado a su inverso dé un número dado". En la notación moderna se puede escribir que lo que buscaban los babilonios era dos números $x \wedge \bar{x}$ tales que $x\bar{x} = 1$ y $x + \bar{x} = b$ Estas dos ecuaciones dan como resultante la ecuación cuadrática: $x^2 - bx + 1 = 0$.

   Representaciones: Lenguaje de las palabras, a lo que algunos investigadores han llamado álgebra retórica.

   b) Cultura Griega
   Características: razonamiento de carácter puramente geométrico que relaciona la cuadratura como la magnitud que se expresa con relacion a la magnitud de sus lados. Las expresiones "al cuadrado" o "es el cuadrado de…" se describen de forma retórica dentro de un sistema deductivo desarrollado con el fin de darle generalidad a sus procedimientos (donde precisamente la deducción permite generar unas premisas generales aplicables a los casos particulares) y son referidas a las áreas y superficies.

   Situaciones presentadas: se observan en los Elementos de Euclides situaciones como: "Si se corta una línea recta en (segmentos) iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por los segmentos desiguales de la (recta) entera, junto con el cuadrado de la (recta que está) los puntos de sección, es igual al cuadrado de la mitad". Proposición 5 Libro II, *Los elementos de Euclides*.

Representaciones: las representaciones para la solución de las proposiciones eran rigurosamente geométricas y las demostraciones eran presentadas de forma retórica.

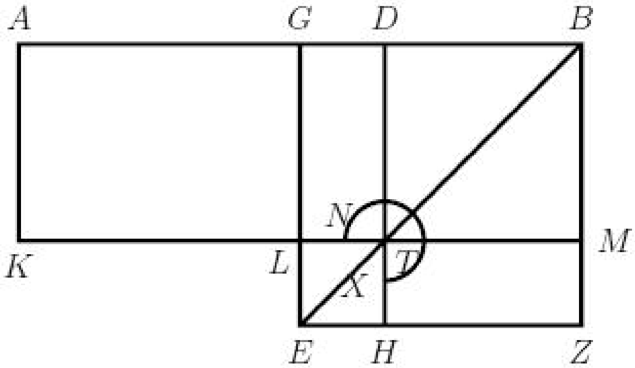

FIGURA N. 1. REPRESENTACIÓN EN LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES

En la Figura No. 1 se muestra un ejemplo de representación y problemas en los Elementos de Euclides. Su demostración es de forma retórica y la aproximación a reducción de palabras solo se evidencia en la notación de los segmentos.

c) Cultura Árabe

Características: manejo del álgebra desde la generalidad pero aún de manera retórica.

Situaciones presentadas: "Un cuadrado y diez de sus raíces, son iguales a tres unidades, es decir, si sumamos diez raíces a un cuadrado, la suma es igual a treinta y nueve".

Representación: se introducen algunas abreviaciones de los procedimeintos (Álgebra Sincopada) y la representación geométrica.

2. Las cónicas

Cultura Griega

Características: en la cultura griega se observa el descubrimiento de las secciones cónicas por parte de Apolonio que realiza un tratado sobre ellas que sirvió de herramienta para la creación de la Geometría analítica. Surge también como solución de los tres problemas clásicos Griegos, como la duplicación del cubo, la cuadratura del círculo y la trisección de un ángulo agudo.

Situaciones presentadas: la demostración de Hipócrates (siglo V a. C.) "…puede reducirse a encontrar dos medias proporcionales entre la arista dada y su doble". En nuestra notación algebraica, sean x e y tales que $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$ Entonces $x^2 = ay$ e $y^2 = 2ax$. Kline (1972, p. 70).

Representación: Álgebra retórica y lenguaje geométrico.

Siglo XVII:

Características: definición de las cónicas como curvas correspondientes a ecuaciones de segundo grado, en x e y.

Situaciones presentadas: estudio de los lugares geométricos, estableciendo un puente para transitar entre la Geometría y el Álgebra, lo que permite asociar curvas y ecuaciones.

Representaciones: geométricas, cartesianas y, con los trabajos de Viéte, también se comienzan a utilizar las representaciones algebraicas. La geometría aquí representada no es la desarrollada por Euclides, sino que su representación está dada en un sistema cartesiano en donde se relacionan variables.

3. Las funciones

Los acercamientos a la construcción del concepto de función los proporcionan Descartes y Fermat con la geometría analítica al estar más interesados en la resolución geométrica de las ecuaciones algebraicas con dos variables, y al hecho de asociar a cada curva una ecuación analítica. Mankiewicz (2005, p. 84) anota que: "Descartes también rompió con la tradición al tratar las potencias como números y no como objetos geométricos. x^2 ya no era un área sino un número surgido de la segunda potencia; su equivalente Geométrico era la parábola; no el cuadrado". Una ruptura importante en esta concepción de cuadratura para lo que significaría la construcción del concepto de función cuadrática.

Como señala Del Río (1996, p. 38) "[Descartes] encontró métodos para construir geométricamente los valores de una variable fijados los de la otra". Por esto ya tiene dos propiedades de la definición de función: la primera, el considerar dos cantidades variables y la segunda, una cierta relación de dependencia. Dirichelt dio la definición de función que es la más empleada hoy en día: " y es una función de x cuando al valor de x en un intervalo dado le corresponde un número y".

Cauchy (1821), citado por Kline (1972, p.1254), dice que: "Cuando se relacionan cantidades variables entre ellas de modo que, estando dado el valor de una de estas, se puedan determinar los valores de todas las otras, ordinariamente se considera a estas cantidades diversas expresadas por medio de la que está entre ellas, la cual entonces toma el nombre de variable independiente y las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente son aquellas a las que uno llama funciones de esa variable". La relación de dependencia entre estas variables facilita la relación en el plano cartesiano por medio de la expresión analítica (ecuación), y según Euler toda función es una expresión analítica. Creemos que de esta forma es posible considerar un hecho que pudiera marcar el paso las formas cónicas a las funciones.

Todo lo anterior evidencia cómo los diferentes protagonistas en la construcción de este concepto, se valieron de un conocimiento empírico, inicialmente, con el fin de someterlo a un sistema racional para posteriormente ser fuente de elementos generadores de nuevos conceptos, sin obedecer a una estructura lineal de dependencia, pero que permite concluir acerca de la importancia de los saberes previos para considerar nuevos conceptos, ya sea para ser mejorarlos o replantearlos.

La modelación como proceso en el aula de matemáticas

En 1998 en Colombia se formularon los Lineamientos Curriculares en el área de matemáticas. De acuerdo con esta visión global e integral del quehacer matemático, proponemos considerar tres grandes aspectos para organizar el currículo en un todo armonioso, entre ellos **los Procesos generales** que tienen que ver con el aprendizaje por medio del desarrollo de cinco procesos al interior del aula, a saber: el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación, y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. (MEN, 1998, p 18)

En este apartado se presentarán algunos argumentos sobre la forma cómo la modelación se convierte en una herramienta didáctica para la construcción de conceptos matemáticos y se muestra a manera de ejemplo una situación que permitiría abordar el concepto de función cuadrática en el aula de clase.

El concepto de modelo

El concepto de modelo matemático ha estado presente en muchos de los campos de las ciencias en las cuales la matemática tiene amplia aplicación en la resolución de problemas. Al respecto se han planteado algunas definiciones como:

- Modelo matemático es un sistema axiomático constituido por términos indefinidos que son obtenidos por la abstracción y cualificación de ideas del mundo real. (MAKI e THOMPSOM, 1973, p. 14, GAZZETTA citado por Leal S. 1999[1]).
- Se define un modelo matemático como una construcción matemática dirigida a estudiar un sistema o fenómeno particular del "mundo-real". Este modelo puede incluir gráficas, símbolos, simulaciones y construcciones experimentales. (Giordano F. 1997, 34).
- Un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen, de alguna forma, un fenómeno en cuestión o un problema de situación real, es denominado: Modelo Matemático. (BIEMBENGUT, 1997, p. 89 citado por Leal S. 1999).
- Modelo matemático de un fenómeno es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen de alguna forma el fenómeno en cuestión. (BASSANEZI, 1997, p. 65 citado por Leal S 1999).
- Se define como modelo matemático de un sistema prototipo **S** (Físico, Biológico, Social, Químico, etc.) a un completo y consistente sistema de ecuaciones matemáticas **Σ**, que es formulado para expresar las leyes de **S** y su solución intenta representar algún aspecto de su comportamiento. Rutherford A. (1978, 5).

Cada una de las ideas presentadas sobre lo que es un modelo hace referencia en gran medida a la visión que se tiene de la matemática en relación con el mundo real. Sin embargo existen diferencias entre las mismas ideas básicamente en la forma cómo se "materializa" matemáticamente la relación, es decir, en la forma de representación matemática del concepto o relación. Aunque el tema es importante dentro de contexto didáctico, no será objeto de estudio de este documento. Para ello remitimos al lector a los trabajos de Duval (1999) y Posada y Villa (2006).

La verdadera importancia de un modelo desde el punto de vista didáctico radica (Bassanezi 2002, citado en Posada y Villa 2006), en tener un lenguaje conciso que expresa nuestras ideas de manera clara y sin ambigüedades, además de proporcionar un arsenal enorme de resultados (teoremas) que propicien el uso de elementos computacionales para calcular sus soluciones numéricas. Por ello se

[1] Este documento es una tesis de Maestría en Ingeniería de producción a la cual el lector puede acceder en http://www.eps.ufsc.br/disserta99/leal/ . consultado el 1 de febrero de 2007

llama simplemente modelo matemático, a un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representan de alguna forma un fenómeno o situación estudiada.

La construcción de un modelo no se hace de manera automática ni inmediata, por el contrario, requiere de cierto periodo de tiempo en el cual el modelador coloca en juego sus conocimientos matemáticos, el conocimiento del contexto y de la situación y sus habilidades para describir, establecer y representar las relaciones existentes entre las "cantidades" de tal manera que se pueda construir un nuevo objeto matemático.

La modelización puede ser considerada como herramienta de representación de situaciones o fenómenos del "mundo real", para lo cual se asumirá al "mundo-real" como el sistema objeto de estudio, compuesto de subsistemas relacionados e interactuando de forma regular. El objetivo es obtener conclusiones de algún fenómeno bajo el procedimiento de observación de su comportamiento, el cual será estudiado para identificar los factores que allí parecen estar involucrados.

Como no es posible considerar y/o identificar todos los factores involucrados, se hacen las simplificaciones y supuestos que elimine algunos de éstos, para con ello construir un modelo que representa el fenómeno. Construido el modelo, se generan todos los análisis posibles para concluir acerca del modelo[2] y por último se interpreta el fenómeno. En la figura N. 2, tomado de Posada y Villa (2005, 72) se esquematiza el procedimiento.

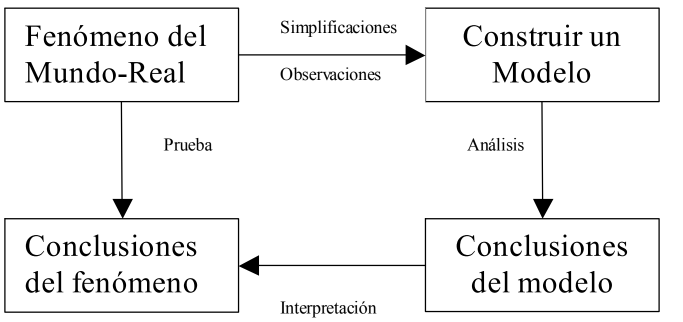

FIGURA N. 2. ESQUEMA QUE ILUSTRA LOS MOMENTOS DEL PROCESO DE MODELIZACIÓN

Esto permite ver al proceso de modelización como un sistema cíclico. Dado algún sistema del "mundo-real", obtenemos la suficiente cantidad de datos que nos permitan construir un modelo. Luego se analiza el modelo y se extraen las conclusiones pertinentes. Una vez se obtiene un conjunto pertinente de

[2] Estas conclusiones pertenecen solo al modelo, no al fenómeno del mundo real que está siendo investigado, puesto que realizadas las simplificaciones este modelo contiene errores y limitaciones.

conclusiones se pasa a interpretarlo para predecir y/o elaborar las respectivas explicaciones, y finalmente examinar las conclusiones en el sistema del mundo-real frente a nuevas observaciones y datos.

En resumen el proceso de modelizar requiere:

1- Observar e identificar los factores involucrados en un fenómeno del mundo-real con posibilidad de hacerle simplificaciones.
2- Conjeturar tentativamente relaciones entre los factores.
3- Analizar para obtener conclusiones de los resultados obtenidos del modelo.
4- Interpretar el fenómeno a la luz del modelo.

Todos los elementos esgrimidos hasta aquí hacen referencia a la actividad básica del matemático aplicado. Sin embargo ¿es posible que los estudiantes en el aula de clase recreen, en cierta forma, este proceso para la construcción de conceptos matemáticos? en el siguiente apartado se hará referencia al proceso de modelización matemática con miras a utilizarla al interior de la clase de matemáticas.

¿Modelación o modelización matemática en el aula de clase?

En ocasiones en la literatura en educación matemática se hace un uso indiscriminado de los términos *modelización* y *modelación*, sin embargo una diferenciación entre ellos se ha sugerido por investigadores como Hein N., Biembengut, M (2006, 3) quienes plantean que:

> En la enseñanza formal, algunos factores como currículo, horario de las clases, número de alumnos por curso, disponibilidad de tiempo para que el profesor efectúe un acompañamiento simultáneo de los trabajos de los alumnos, nos llevaron a efectuar algunas adaptaciones en el proceso de modelización matemática como metodología de enseñanza, estableciendo un método que denominamos Modelación Matemática.

La diferencia se hace necesaria debido a que en ocasiones, el proceso de modelización no es posible desarrollarlo en todo su sentido en el aula de clase, en parte porque algunas de las situaciones del mundo real a las que se pueden ver enfrentados los estudiantes requieren de herramientas matemáticas que no siempre se encuentran en correspondencia con su desarrollo del pensamiento; por tanto, el docente debe realizar un proceso en dos sentidos, primero el de descontextualización y segundo el de recontextualización, de tal manera que la situación, sin perder su esencia e intencionalidad, se transforme en una situación que propicie el aprendizaje de los estudiantes.

En el contexto educativo, estos procesos de descontextualización y recontextualización de un concepto matemático, se asocian al consenso que existe en aceptar que los objetos científicos en su mayoría no pueden abordarse con el mismo nivel de desarrollo de la ciencia en el aula de clase, para lo cual se requiere que los docentes y/o investigadores en educación realicen un proceso de conversión del saber científico en un saber objeto de enseñanza. A este proceso se le llama **"Transposición didáctica".** En este sentido es posible entender al proceso de modelación matemática como una "transposición didáctica" del proceso de modelización matemática que aunque no es directamente un objeto científico si se considera como una actividad científica.

De esta forma **la modelación** es vista como una estrategia de aprendizaje de conceptos matemáticos que aborda los principios básicos de la modelización, y por lo tanto propende por la construcción de modelos matemáticos a nivel de los estudiantes en el aula de clase. En este sentido, Hein N., Biembengut, M (2006, 4) consideran que con la aplicación de la modelación matemática se propicia en el estudiante:

- Integración de la matemática con otras áreas del conocimiento.
- Interés por la matemática frente a su aplicabilidad.
- Mejoría de la apreensión [aprehensión[3]] de los conceptos matemático.
- Estímulo a la creatividad en la formulación y resolución de problemas.
- Habilidad en el uso de máquinas (calculadora gráfica y computadoras).
- Capacidad para actuar en grupo.
- Orientación para la realización de la investigación.
- Capacidad para la redacción de esa investigación.

De esta forma **la modelación** como estrategia de aprendizaje de las matemáticas proporciona una mejor comprensión de los conceptos matemáticos al tiempo que permite constituirse en una herramienta motivadora en el aula de clase. De igual manera potencia el desarrollo de capacidades en el estudiante para posicionarse de manera crítica antes las diferentes demandas del contexto social junto con la capacidad para leer, interpretar, proponer y resolver situaciones problemas.

A continuación se presenta a manera de ejemplo una situación que puede ser desarrollada en el aula de clase con el fin de aproximarse al proceso de modelación, tal y como se concibe en este momento.

[3] Se presenta la palabra apreensión en lugar de aprehensión por ser una trascripción directamente del original que fue publicado en las memorias del V festival de Matemáticas, realizado entre el 29 y el 31 de marzo de 2006 en Puntarenas Costa Rica y que se encuentra disponible en http://www.cientec.or.cr/matematica/pdf/P-2-Hein.pdf consultado el 20 de diciembre de 2006

Empresa de viajes JAVO. LTDA[4]

En la empresa de viajes JAVO Ltda. están pensando en promover un plan turístico a cualquier destino regional. Con el ánimo de captar la atención de los viajeros se propone que el valor del paquete turístico por persona sea de $350.000. Sin embargo, si esta persona organiza un grupo se hace un descuento de $2.000 por cada persona, válido para cada uno de los miembros del grupo. Es decir, si viaja una pareja se hace un descuento de $4.000 a cada uno de ellos. De igual manera, si es un grupo de 5 personas se hace un descuento de $10.000 (5 veces $2.000) a cada uno de los viajeros.

Momento 1 – Reconocimiento y representación de las relaciones funcionales.

Con base en la información anterior responda:

a. ¿Cuál sería el costo del viaje para un grupo de 10 personas? ¿Y para un grupo de 23 personas?
b. Si el costo para un grupo fuera de $9'800.000, ¿cuántas personas harían parte del grupo?
c. Con base en esta información llene la siguiente tabla:

Número de miembros del grupo	Valor del descuento por persona	Valor tiquete por persona	Valor total del viaje para el grupo
2			
5			
	14.000		
		310.000	
50			
62			

d. Según las condiciones de la situación, ¿cuáles cantidades permanecen constantes y cuáles varían?
e. Exprese con palabras la relación que existen entre cada una de las siguientes cantidades:
   1. Número de miembros del grupo y valor del descuento por persona.
   2. Número de miembros del grupo y valor del tiquete por persona.
   3. Número de miembros del grupo y valor total del viaje para el grupo.
f. Represente mediante símbolos cada una de las anteriores relaciones.

[4] Una versión más simplificada de esta situación fue publicada por los autores en Posada, F., Villa, J. (2006, 160-162).

Momento 2 – Análisis de algunas propiedades a través de sus representaciones gráfica y tabular

En la figura N. 3 se muestra la tabla creada por la empresa utilizando el software *Excel.* Esta tabla pretende simular la situación de tal manera que se pueda llevar el registro de sus posibles ofertas y restricciones a los clientes.

AGENCIA DE VIAJES: JAVO LTDA.

salto	20
valor inicia	3

Número de viajeros	Valor del decuento	Costo del tiquete por persona	Valor total para el grupo
3	6000	344000	1032000
23	46000	304000	6992000
26	52000	298000	7748000
29	58000	292000	8468000
32	64000	286000	9152000
35	70000	280000	9800000
38	76000	274000	10412000
41	82000	268000	10988000
44	88000	262000	11528000
47	94000	256000	12032000
50	100000	250000	12500000
53	106000	244000	12932000
56	112000	238000	13328000
59	118000	232000	13688000
62	124000	226000	14012000
65	130000	220000	14300000
68	136000	214000	14552000
71	142000	208000	14768000

Hoja1 Hoja2 Hoja3

Listo

FIGURA N. 3 IMAGEN DEL ARCHIVO JAVO.LTDA

Ahora imaginemos que por causa de un virus el archivo se deterioró y ahora hay que construirlo de nuevo. Realice la construcción de este archivo y utilícelo para realizar las siguientes actividades:

1. Asigne diferentes valores a la casilla salto y valor inicial, observe y describa los cambios que genera en la tabla.

2. Observe la tabla y con base en ella responda:
   a. A medida que aumenta el número de viajeros, indique qué sucede con cada una de las siguientes cantidades:
      El descuento por persona.
      El valor del tiquete por persona.
      El costo total del viaje al grupo.

b. Si se duplicara el número de viajeros, ¿qué efectos tendría esto sobre cada una de las otras cantidades de la tabla?

c. ¿En qué valor se incrementa el costo del viaje para el grupo cuando el número de viajeros aumenta de 12 a 15, de 15 a 18, de 18 a 21, de 42 a 45, 83 a 86, de 86 a 89 y de 89 a 91? Describa las regularidades que puede observar.

d. A medida que el número de personas aumenta de 0 a 87, ¿cómo es el crecimiento en el valor del viaje para el grupo? ¿Cómo se puede observar esta forma de crecimiento en la gráfica de la función?

e. A medida que el número personas aumenta de 88 en adelante, ¿cómo es el decrecimiento en el valor del viaje para el grupo? ¿Cómo se puede observar esta forma de decrecimiento en la gráfica de la función?

f. ¿Para qué número de viajeros la empresa obtendría su máximo ingreso? ¿Cómo se puede observar este valor en la gráfica de la función?

g. Suponga que se tiene un grupo de 50 personas y otro de 125 personas. ¿Cuánto dinero recibiría la empresa por cada uno de estos grupos? ¿Cuál de los dos grupos es más conveniente para la empresa? Argumente su respuesta.

h. ¿Qué relación existe entre las cantidades *número de viajeros* y *costo del tiquete por persona* con la cantidad del *costo total para el grupo*?

i. ¿Cuál es la gráfica que corresponde a cada una de las columnas de la tabla?

j. ¿Qué relación se puede observar entre la gráfica del *costo del tiquete por persona, el eje x* y la gráfica del *valor total del grupo*?

3. Si usted fuera gerente o asesor de la empresa, ¿qué cambios sugeriría a este plan para que generara mejores utilidades a la empresa?

Análisis de la situación:

La situación está presentada en lenguaje natural de tal manera que permita a los estudiantes identificar las cantidades que intervienen (variables y constantes) y a partir de la relaciones existentes construir un modelo matemático que mediante su análisis permita tomar decisiones con respecto a la situación.

De igual manera la situación permite identificar algunas de las características más importantes de la función cuadrática, a saber: su crecimiento, decrecimiento, punto de máxima/mínima, rapidez del cambio (concavidad), entre otros.

Aunque no es una situación construida por los estudiantes a partir de su indagación o interacción con el mundo real (no se visitó ninguna empresa para indagar por los planes) la situación sí tiene un alto grado de coherencia con el contexto cotidiano en tanto que es una hipótesis que se puede plantear como una opción perfectamente válida en una empresa de este tipo de servicios.

Este tipo de actividad puede facilitarse mediante un trabajo colaborativo en el aula de clase en el que los estudiantes trabajan en equipo y pueden comunicar los resultados de sus reflexiones a los demás miembros del grupo. En este sentido la pregunta cumple un papel muy importante en tanto que permite a los estudiantes reflexionar sobre sus propias ideas, plantear y validar conjeturas. Las preguntas promueven el reconocimiento de regularidades y relaciones a través de la realización de cálculos de los valores de una magnitud en relación con las otras; además, se requiere que el estudiante se aproxime a describir esta relación funcional utilizando el lenguaje natural.

En el segundo momento de la situación se pretende que los estudiantes identifiquen algunas características de la forma como cambian las variables ya que la situación exige al estudiante tener cierto control sobre el cambio que surge en cada una de las variables (magnitudes) a medida que crece o decrece el número de viajeros; de tal forma, que a través de su análisis pueda identificar un procedimiento que le permita reconstruir la tabla que se muestra en la figura 4. De esta manera a través de la manipulación de la tabla el estudiante puede anticipar conclusiones favorables o desfavorables para los viajeros y para la empresa de viajes, con base en las condiciones generales del problema.

La situación también permite realizar un análisis de la variación discreta a la luz de gráfica similar a la realizada por Oresme en sus estudios del movimiento en la edad Media. En la figura N. 3 se mostró un tramo de la gráfica de la relación que existe entre el número de viajeros y el valor total del viaje para el grupo, con la construcción de este gráfico se pretende observar que a medida que el número de viajeros aumenta en una unidad el costo total del viaje para el grupo también aumenta, sin embargo se puede observar que cada vez aumenta en menor valor.

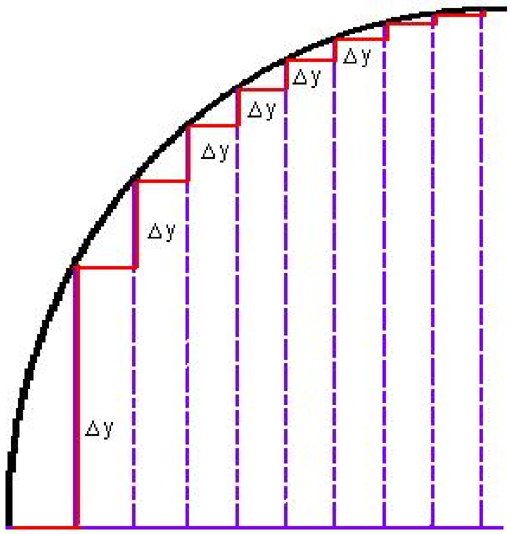

FIGURA N. 4. TRAMO DE DECRECIENTE DE LA PARÁBOLA DE LA RELACIÓN FUNCIONAL DE LA SITUACIÓN

En la figura N. 5 se muestra un tramo de la gráfica de la relación que existe entre dos variables diferentes. Con la construcción de este gráfico se pretende observar que a medida que una de las variables aumenta en una unidad la otra variable aumenta, pero en este caso se puede observar que cada vez aumenta en un mayor valor.

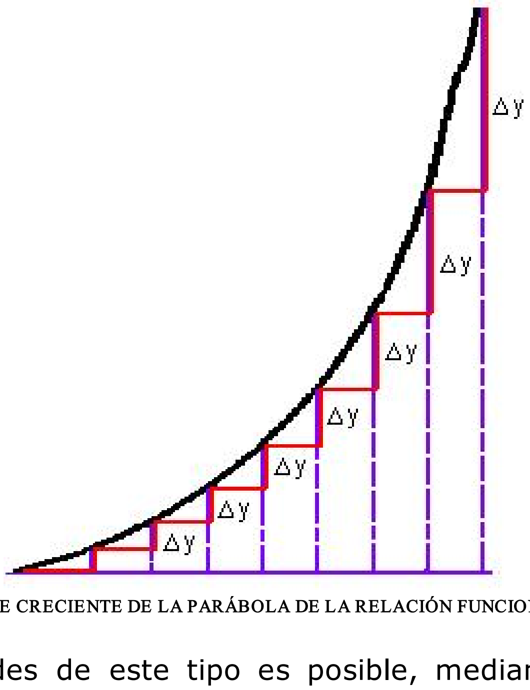

FIGURA N. 5. TRAMO DE CRECIENTE DE LA PARÁBOLA DE LA RELACIÓN FUNCIONAL DE LA SITUACIÓN.

Por medio de actividades de este tipo es posible, mediante una generalización, llegar a la conclusión de que las gráficas cóncavas hacia arriba representan un cambio positivo o de aumento en la variación de la función y que una gráfica cóncava hacia abajo representa una un cambio negativo o disminución de la variación de la función.

Otros elementos didácticos que se identifican en la situación son:

- La identificación y selección de las magnitudes variables y constantes.
- La formulación de hipótesis de trabajo.
- Construcción de ecuaciones y herramientas simbólicas y gráficas para realizar procedimientos.
- El establecimiento de argumentos que permitan validar la obtención del modelo.
- La utilización del modelo para elaborar y probar conjeturas de la situación problema.

Conclusiones

En el rastreo histórico no se reportaron enunciados explícitos en cuanto al paso de las nociones de ecuación cuadrática a las de función cuadrática, pero los argumentos antes expuestos llevan implícito el hecho de que a las situaciones cuadráticas, después de ser estudiadas en el plano, les fue asignada una generalidad por medio de su expresión analítica, y al observar que algunas de ellas cumplían con la relacion unívoca entre cantidades, surgió el concepto de función cuadrática. De aquí se confirma la idea que, **desde el punto de vista histórico, las ecuaciones y las funciones tuvieron una génesis independiente, y ligadas a procesos de modelización.** De estas reflexiones surge un importante interrogante, y es si se debe continuar con dicha separación al interior del aula de clase o si, por el contrario, se debe sustentar la necesidad de construir ambos conceptos uno en relación con el otro a través de la modelización de situaciones de variación.

Con respecto al proceso de modelación como herramienta didáctica, nuestro rastreo bibliográfico nos permite concluir que la modelación puede ser considerada como el puente entre las matemáticas y el mundo real. Sin embargo, se debe destacar que la complejidad del proceso de modelización matemática, tanto en su fase de formulación como en la de validación, obliga a tener en cuenta aspectos como:

- Errores y aciertos en la experimentación y en la toma de datos.
- La determinación de los tipos de magnitud involucrados en la situación y el papel de los mismos al interior del modelo.
- La observación y cuantificación de las relaciones entre las magnitudes involucradas en la situación.
- La simplificación respecto a factores externos a la situación que la afectan.

- El doble estatus que el objeto matemático juega cuando es tratado como modelo: por un lado como propio de las ciencias matemáticas y por el otro como representante de un fenómeno de variación.
- La generalidad de los resultados matemáticos frente a la particularidad de las situaciones.
- El papel que juegan los sistemas de representación semiótica en la construcción de modelos matemáticos.
- La validez de los resultados obtenidos.

Bibliografía

Bassanezi, R. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo, Brasil: Contexto.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Universidad del Valle. Santiago de Cali.

Giordano F., Weir M., Fox W. (1997) *A first Course in Mathematical Modeling*. Second Edition. Brooks/Cole Publishing Company.

Leal, S. (1999). *Modelação matemática uma proposta metodológica para o curso de economia.* Tesis de maestría no publicada. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis: Brasil.

Posada, F. y Villa, J (2005). *El concepto de función Lineal desde una perspectiva variacional*. Tesis de maestría no publicada, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Posada, F. y Villa, J (2006). Razonamiento algebraico y la modelación matemática. En: Posada y Obando (Eds), Pensamiento variacional y razonamiento algebraico. (pp127-183. Medellín: Gobernación de Antioquia

Rutherford, A. (1978). *Mathematical Modelling Techniques*. New York, EUA: Dover Publications, INC

Hein N., Biembengut, M (2006). Modelaje matemático como método de investigación en clases de matemáticas. En M. Murillo (presidente), *Memorias del V festival internacional de matemática*. pp 1- 25 Puntarenas:Colegio universitario de Puntarenas.

Del Río Sánchez, J. (1996) Lugares geométricos: Las Cónicas. Madrid: Síntesis.

Kline, M. (1992). El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días. I y II. Madrid: Alianza editorial.

Mankiewicz, R. Historia de las matemáticas. Editorial Paidós.

Ruiz, L. (1998). La noción de función: análisis epistemológico y didáctico. Jaén: Universidad de Jaén.

19 de abril de 2007