Procesos de matematización

Procesos de matematización| Revista Virtual Universidad Católica del Norte, **70**, 228-259
ISSN: 0124-5821 (En línea)

Monsalve-López, D. L., & Zapata-Cardona, L. (2023, septiembre-diciembre). Procesos de matematización de estudiantes en la resolución de tareas matemáticas realistas. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (70), 228-259. https://www.doi.org/10.35575/rvucn.n70a9

Procesos de matematización de estudiantes en la resolución de tareas matemáticas realistas

Students' mathematization processes in solving realistic mathematical tasks

Dennis Lorena Monsalve-López
Magister en Educación
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Medellín, Colombia
dennis.monsalve@udea.edu.co
Orcid: https://orcid.org/0000-0003-0977-5868
CvLAC:
https://scienti.minciencias.gov.co/cvlac/visualizador/generarCurriculoCv.do?cod_rh=0002070339

Lucía Zapata-Cardona
Doctora en Educación Matemática
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Medellín, Colombia
lucia.zapata1@udea.edu.co
Orcid: https://orcid.org/0000-0003-4266-5273
CvLAC:
https://scienti.minciencias.gov.co/cvlac/visualizador/generarCurriculoCv.do?cod_rh=0000430781

Recibido: 6 de febrero de 2023
Evaluado: 2 de mayo de 2023
Aprobado: 28 de julio de 2023

Tipo de artículo: Investigación

Resumen

El presente documento reporta una investigación que tuvo como objetivo analizar procesos de matematización que emergen de los estudiantes en la solución de tareas matemáticas realistas. Se adoptó un paradigma de investigación cualitativo con un enfoque hermenéutico. Los participantes fueron diez estudiantes voluntarios que cursaban octavo y noveno grado (edades de 13 a 15 años) del sistema escolar colombiano. Las principales fuentes de información provienen de entrevistas, basadas en cuatro tareas matemáticas realistas y en los registros de representación usados por los participantes. Las entrevistas fueron grabadas en video y luego transcritas para facilitar el análisis. Los análisis se centraron en la actividad matemática que tuvo lugar cuando los participantes se enfrentaron a la solución de esas tareas. Los hallazgos ilustran diferentes niveles de matematización en los participantes como: conteo, tanteo, establecimiento de conexiones, identificación de patrones o reglas de formación, realización de representaciones pictóricas y numéricas, búsqueda de atajos, identificación de estructuras numéricas y espaciales, argumentación, identificación y clasificación de información relevante, generalización, identificación de relaciones funcionales, correspondencia, covariación y formalización. Una implicación práctica de este estudio es que los resultados son insumos para el trabajo del profesor en el aula y para orientar los procesos de formación de profesores de matemáticas.

Palabras clave: Actividad matemática; Educación matemática realista; Procesos de matematización; Tareas matemáticas realistas.

Abstract

This paper reports on a research study that aimed to analyze mathematization processes that emerged from students in solving realistic mathematical tasks. A qualitative research paradigm and a hermeneutic approach were adopted. The participants were ten volunteer students in eighth and ninth grades (13-15-year-old) from the Colombian school system. The main sources of information came from interviews, based on four realistic mathematical tasks, and on the registers of representation used by the participants. The interviews were videotaped and then transcribed to facilitate analysis. The analyzes focused on the mathematical activity that took place when the participants faced the resolution of those mathematical tasks. The findings reveal different levels of mathematization in participants such as: counting, testing, establishment of connections, identification of patterns or rules of formation, realization of pictorial and numerical representations, search for shortcuts, identification of numerical and spatial structures, argumentation, identification and classification of relevant information, generalization, identification of functional relationships, correspondence, covariation, and formalization. A practical implication of this study is that the results are inputs for the teacher's work in the classroom and for guiding mathematics teachers' education processes.

Keywords: Mathematical activity; Realistic mathematics education; Mathematization processes; Realistic mathematical tasks.

Introducción

La actividad matemática, entendida como el conjunto de acciones (planificación, ejecución, uso de instrumentos) que una persona emprende para la solución de tareas matemáticas ha ganado interés en los últimos años en el campo de la educación matemática y en especial en la educación matemática realista (Ariati et al., 2022; Gravemeijer et al., 2016; Phan et al., 2022). La educación matemática realista es una corriente didáctica que estudia el *qué* y el *cómo* de la enseñanza de las matemáticas y nace como resistencia al carácter mecánico que reinaba en las matemáticas escolares en los Países Bajos en la segunda mitad del siglo pasado, corriente que aún hoy sigue siendo vigente. Esta corriente promueve la matemática como actividad humana para todos (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014) y les otorga a los estudiantes un papel protagónico mientras están en actividad matemática. A través de dicha actividad, los estudiantes acceden a conocimientos, objetos y habilidades enmarcadas en tareas matemáticas realistas que generan la necesidad del uso de herramientas matemáticas para su organización y solución.

Esa actividad matemática se conoce como *matematizar* y uno de los propósitos de la educación matemática realista es precisamente apoyar a los estudiantes para que avancen en sus procesos de matematización. Es decir, se busca ayudar a concretar la acción de solucionar tareas matemáticas realistas mediada por los recursos culturales disponibles, como instrumentos, discursos, conceptos u objetos. No obstante, aunque la educación matemática realista ha venido madurando en los últimos 30 años (Gravemeijer, 2020; Vos, 2020), aún se cuenta con una descripción muy limitada de esos procesos que los estudiantes ponen en juego cuando emprenden la solución a una tarea matemática realista. Es decir, a pesar de la evolución de esta corriente didáctica aún se generan preguntas sobre cómo matematizan los estudiantes, qué herramientas matemáticas usan y cómo progresan por diferentes niveles de matematización.

Procesos de matematización| Revista Virtual Universidad Católica del Norte, **70**, 228-259
ISSN: 0124-5821 (En línea)

En términos generales, las tareas matemáticas hacen referencia a los enunciados, problemas o actividades prácticas que se usan como herramientas de instrucción (Zapata-Cardona, 2014), mientras que las tareas matemáticas realistas tienen una conexión contextual que valora el aprendizaje de las matemáticas no como un producto terminado, sino como el resultado de un proceso donde las matemáticas resultan prácticas y útiles. Tradicionalmente, la matemática escolar se ha caracterizado por el uso de tareas que privilegian la aplicación de operaciones aritméticas (Jiménez & Verschaffel, 2014; Orrantia et al., 2005) que ocultan los procesos por los que los estudiantes avanzan para conseguir las respuestas. Esto se evidenció en los resultados del *TIMSS Video Study* (Tercer Estudio Internacional en Matemáticas y Ciencias, por sus siglas en inglés) (Hiebert et al., 2003) y del *TIMSS 2003* (Mullis et al., 2004), los cuales encontraron que en muchos países las tareas usadas en la clase de matemáticas estaban caracterizadas por un énfasis en el dominio de habilidades básicas y en la comprensión de conceptos que menospreciaban la utilidad práctica de las matemáticas.

Este fenómeno parece ser explicado por la fuerte influencia de los antiguos filósofos griegos en la constitución de las matemáticas clásicas, quienes consideraban vulgar y deshonroso las habilidades relacionadas con las necesidades diarias y enaltecían la pureza de las matemáticas (Vos, 2020). Este tipo de tareas no siempre logran hacer evidente en los estudiantes la actividad matemática que ponen en juego en la solución y les ofrece limitadas posibilidades para sopesar información, clasificarla y establecer posibles incoherencias (Gravemeijer, 2020; Reusser & Stebler, 1997). Así, mucha de esta actividad matemática queda oculta a los ojos del docente o del investigador.

Algunas investigaciones (Jiménez & Ramos, 2011; Jiménez & Verschaffel, 2014; Orrantia et al., 2005) sugieren que estas tareas con una alta carga procedimental favorecen los procesos simples de pensamiento y desestimulan los procesos de reflexión que se requieren para desarrollar la actividad matemática y para avanzar a niveles superiores. En ese sentido, las tareas que privilegian la aplicación prescriptiva de algoritmos y las respuestas como productos terminados no permiten evidenciar procesos de matematización como identificar y clasificar información relevante, sopesar incoherencias, hacer esquemas, encontrar nuevos caminos o atajos, usar bocetos, explicar, establecer vínculos o analizar tendencias. Es posible que la elección de tareas matemáticas tenga una relación directa con las oportunidades de los estudiantes para matematizar

Procesos de matematización| Revista Virtual
Universidad Católica del Norte, **70**, 228-259
ISSN: 0124-5821 (En línea)

y poner en acción los recursos culturales disponibles como conceptos, instrumentos, discursos, objetos o conocimientos.

El proceso de matematizar es la actividad de organizar la realidad de una tarea matemática realista mediante el uso de herramientas matemáticas para darle solución (Gravemeijer et al., 2016). Las herramientas matemáticas pueden ser: la representación de la situación problemática, la esquematización, la suma reiterada, la aplicación del conocimiento de los hechos numéricos, la forma de hacer el seguimiento de los resultados y la comunicación de las estrategias (Van den Heuvel-Panhuizen, 2002, p. 17).

La estimulación de los procesos de matematización demanda superar el fuerte privilegio que se le ha dado al componente procedimental para enfocarse en la acción matemática. Una tarea matemática realista no necesariamente hace referencia a situaciones que tienen un vínculo con el mundo real, sino a aquellas que pueden ser imaginables, visualizables, recreables o representables en la mente del estudiante, ante las cuales se pone en juego el sentido común y se vinculan las matemáticas (Zolkower et al., 2020). Las tareas matemáticas realistas ubican al estudiante en situaciones interesantes en las cuales se circunscribe la actividad; estas no sólo se presentan verbalmente a partir de enunciados, sino también a partir de figuras, dibujos, fotografías, diagramas y otras visualizaciones.

Los procesos de matematización —de reorganización de distintas esferas del entorno social y natural usando las matemáticas (Freudenthal, 2006) — podrían emerger cuando los estudiantes hacen uso de sus habilidades, conocimientos, nociones y procedimientos matemáticos informales e intuitivos de manera activa para darle solución a las tareas matemáticas realistas. En este reporte se intenta responder a la pregunta de investigación: ¿qué procesos de matematización emergen de los estudiantes cuando resuelven tareas matemáticas realistas?

Marco Teórico

Educación matemática realista

La educación matemática realista es una corriente didáctica que nace en los Países Bajos a partir de los años 60 del siglo XX, con el liderazgo de Hans Freudenthal. Al fortalecimiento de

Procesos de matematización| Revista Virtual Universidad Católica del Norte, **70**, 228-259
ISSN: 0124-5821 (En línea)

esta corriente se vincularon varios investigadores conectados con el Instituto para el Desarrollo de la Educación de la Matemática de la Universidad de Utrecht en Holanda, denominado actualmente Instituto Freudenthal (Van den Heuvel-Panhuizen, 2020). La educación matemática realista se ha caracterizado por el uso de tareas realistas, modelos como estrategia para el progreso (llegar a soluciones generales a partir de soluciones relacionadas con el contexto), producciones y construcciones de los estudiantes, interacción y reflexión en el proceso de aprendizaje y la interconexión entre los ejes del currículo (Zapata-Cardona, 2020).

Hans Freudenthal asumía la matemática como una actividad humana para todos y no para unos cuantos. En ese sentido, la matemática, al ser una actividad humana, no se transmite a los estudiantes, el estudiante es un participante activo que descubre sus propias estrategias mediante la guía del docente (Sumirattana et al., 2017). También, el hacer matemático, o matematización, tiene su punto de partida en esa visión realista (Gravemeijer & Doorman, 1999) dentro de la cual los estudiantes construyen sus propias estrategias y conceptos matemáticos.

Lo *realista* está relacionado con las posibilidades de ofrecer un escenario para la proyección mental de la situación de estudio (Zapata-Cardona, 2020); la palabra *realista* en holandés “*zichs realiseren*” hace referencia a imaginar. Una tarea es realista “si se presenta ante el sujeto que aprende como razonable, realizable o susceptible de ser imaginada” (Zolkower et al., 2006, p. 13). Para Freudenthal (2006), lo “realista” es aquello que tiene sentido para los individuos y puede representarse mentalmente, incluyendo objetos y acciones mentales.

La esencia de las tareas realistas está en que sean imaginables y recreables. Además, en la educación matemática realista, hacer matemáticas no solo se centra en la solución final, sino también en esas formas a través de las cuales se lleva a cabo el proceso, tales como: la búsqueda de patrones y sus múltiples relaciones, las pruebas de conjeturas y la estimación de resultados (Sitorus & Masrayati, 2016, p. 119). La investigación educativa ha mostrado el potencial de esta corriente en el desarrollo de la alfabetización matemática (Ariati et al., 2022), y también parece tener un fuerte efecto tanto en las habilidades para la resolución de problemas como en las habilidades críticas y creativas requeridas en el razonamiento (Ariati & Juandi, 2022).

Procesos de matematización| Revista Virtual Universidad Católica del Norte, **70**, 228-259
ISSN: 0124-5821 (En línea)

Matematización

Los procesos de matematización hacen referencia a la actividad matemática empleada para la comprensión, organización o estructuración de las tareas realistas planteadas. La actividad matemática comprende todas las acciones mentales y concretas que los individuos ponen en juego para darle solución a una tarea matemática. La matematización puede surgir de actividades de exploración intuitivas en tareas matemáticas que ofrecen a los estudiantes la oportunidad de modelar, estructurar, representar y proponer soluciones (Dekker, 2020; Gutiérrez et al., 2017; Jupri et al., 2014; Ramos, 2005; Wijers & de Haan, 2020). Freudenthal (2006) define matematizar como una actividad humana en la que se usan herramientas matemáticas estructurantes y organizadoras para comprender el mundo incluida la matemática misma.

De acuerdo con esta postura, los procesos de matematización están relacionados con la actividad matemática empleada para la comprensión, organización o estructuración requerida en las diferentes esferas del entorno social y natural. Gravemeijer (2020) y Zapata-Cardona (2020) coinciden en que la matematización es la actividad matemática misma. Así, matematizar tiene relación con la actividad de organización de la realidad a partir de las matemáticas que puede ser resultado de una experiencia intuitiva expresada en un lenguaje cotidiano y puede derivar en una expresión matemática. El proceso de matematización involucra reconocer características básicas en situaciones, problemas, procedimientos, algoritmos y simbolizaciones; descubrir rasgos comunes, similitudes, analogías e isomorfismos; ejemplificar ideas; afrontar situaciones problemáticas de manera creativa; incorporar nuevos objetos mentales y operaciones; buscar atajos y abreviar estrategias iniciales en búsqueda de esquematizarlas, algoritmizarlas, simbolizarlas y formalizarlas; y reflexionar sobre la actividad matematizadora (Treffers, 1991).

La educación matemática realista promueve la matematización progresiva al hacer uso de herramientas matemáticas (representaciones y descripciones) en diferentes niveles de evolución: situacional, referencial, general o formal (Alagia et al., 2005; Freudenthal, 2006; Gravemeijer & Doorman, 1999). En el nivel situacional, el estudiante a partir de la tarea realista establece conexiones con conocimientos previos para visualizar y esquematizar (Trelles-Zambrano et al., 2019). En el nivel referencial, el estudiante toma conciencia sobre el objeto matemático que presenta la tarea realista y describe las relaciones y conceptos, propone esquemas y estudia el cambio. En el nivel general, el estudiante identifica patrones, estructuras matemáticas, realiza deducciones, construcciones o justificaciones que le ayudan a poner a prueba lo razonado. En el nivel formal, el estudiante usa propiedades comunes para establecer reglas, realizar representaciones algebraicas, proponer fórmulas, procedimientos o realizar predicciones. Los procesos de matematización ayudan tanto a traducir una tarea realista al mundo matemático y, a su vez, ofrecen la oportunidad de visibilizar las matemáticas que se usan en la organización para darle solución a la tarea (Gravemeijer, 2020).

Metodología

Atendiendo a la naturaleza cualitativa de los procesos de matematización, se siguió un paradigma cualitativo con enfoque hermenéutico. El enfoque hermenéutico busca comprender e interpretar los fenómenos y rastrear su desarrollo, y en ese sentido permitió estudiar los procesos de matematización de los participantes a partir de la técnica de análisis de su discurso (Creswell, 2014). En el enfoque hermenéutico, la indagación conduce a la interpretación para aclarar los aspectos ocultos que se esconden detrás de los fenómenos, al tiempo que revela los significados que no son evidentes inmediatamente (Sánchez Gamboa, 1998).

Se analizó la actividad matemática de los participantes a partir de las verbalizaciones o producciones escritas que surgieron cuando solucionaban las tareas matemáticas realistas. Para lo cual se produjo la información a partir de entrevistas individuales semiestructuradas y basadas en tareas matemáticas realistas. La actividad matemática de los participantes al resolver tareas realistas se constituyó en la unidad de análisis de la investigación. Se prestó especial atención a los momentos en los que buscaban atajos, cambiaban de estrategias, construían modelos, clasificaban, organizaban, entre otros.

Participantes de la investigación

Los participantes fueron diez estudiantes (cuatro de octavo y seis de noveno) del sistema escolar colombiano, quienes para el momento en que se llevó a cabo el trabajo de campo tenían entre los 13 y 15 años. Los participantes se seleccionaron teniendo como criterios fundamentales

Procesos de matematización| Revista Virtual
Universidad Católica del Norte, **70**, 228-259
ISSN: 0124-5821 (En línea)

la edad, la disponibilidad y el acceso a recursos tecnológicos; el desempeño académico no fue relevante. Se hizo una convocatoria abierta y se envió un afiche a través de redes sociales a grupos escolares de octavo y noveno grado y a conocidos de las investigadoras que cursaban estos grados.

Los participantes recibieron la información sobre la investigación antes de decidir su participación y fueron autorizados por sus padres o tutores después de llevar a cabo todo el proceso de consentimiento informado. Aunque fueron diez participantes, en el análisis sólo se incluyen los episodios más relevantes y que mejor representan la actividad matemática observada. Esta decisión se tomó con el ánimo de evitar redundancias. Los episodios son fragmentos de las entrevistas semiestructuradas en los que los participantes, resolviendo las tareas matemáticas realistas, hicieron evidente sus procesos de matematización.

Las entrevistas se llevaron a cabo de forma individual para favorecer la autenticidad de las acciones y reducir la influencia de otros agentes. Para proteger la integridad y la privacidad de los participantes, de acuerdo con las normas de investigación con seres humanos en Colombia, los nombres que aparecen en este reporte son seudónimos. La información de los participantes se presenta en la Tabla 1.

Tabla 1

Información de los participantes

N° de Participantes	Edad	Grado
2	13	8vo
2	15	8vo
2	13	9no
2	14	9no
2	15	9no

Producción de la información

Las entrevistas semiestructuradas estuvieron basadas en cuatro tareas matemáticas realistas. Todos los participantes de manera individual solucionaron cada una de las tareas. Se construyó un protocolo de entrevista que permitió avanzar de acuerdo con las respuestas del participante (Hernández et al., 2014). La entrevista tuvo una duración aproximada de treinta minutos por participante. Se les presentó de forma oral el enunciado de la tarea y se apoyó con

Procesos de matematización| Revista Virtual Universidad Católica del Norte, **70**, 228-259
ISSN: 0124-5821 (En línea)

representaciones visuales (ver Figura 1, 2, 3 y 4). Se les pidió que iniciaran la solución de la tarea y que fueran narrando en voz alta lo que iban pensando y las decisiones que iban tomando.

Cada participante se dotó de hojas de papel en blanco y lápices (o se le solicitó que consiguieran) y este material se dispuso en caso de que necesitaran para hacer alguna representación, esquema o cálculo. Al final se hicieron preguntas de comprobación cuando fue necesario. Las preguntas se emplearon como estrategias para hacer evidente el pensamiento de los participantes al resolver la tarea. Para rastrear la actividad matemática se plantearon preguntas que indagaban el *cómo* o el *por qué*. También, se propusieron preguntas como: ¿Por qué funciona esto? ¿Cómo lo hiciste? ¿Siempre funciona? ¿Puedes explicarlo de otra manera? Los procesos de matematización de los estudiantes se observaron en los enunciados verbales del discurso y en algunas representaciones en la producción escrita. Las entrevistas se realizaron en modalidad presencial o virtual de acuerdo con la disponibilidad de los participantes. Las entrevistas fueron video grabadas, se transcribieron para facilitar el análisis y se rastrearon los episodios que hacían evidente los procesos de matematización.

Tareas matemáticas realistas

Las tareas matemáticas realistas usadas como instrumentos para la producción de la información fueron tomadas de diversas investigaciones (Callejo et al., 2016; Sabena & Cusi, 2020; Vergel et al., 2020; Vergel & Rojas, 2018). Estas tareas generan la necesidad en el participante de organizar matemáticamente la realidad (Van den Heuvel-Panhuizen, 2002). Se usaron tareas de álgebra porque se prestaban para estimular los procesos de matematización, tenían diferentes formas de llegar a la solución y se podían solucionar poniendo en acción el conocimiento informal. Las tareas matemáticas, realistas al permitir que el estudiante imagine o experimente una situación como real, favorecen el desarrollo de diferentes habilidades mentales al realizar una matematización progresiva (Ponte & Brocardo, 2020; Gravemeijer, 2020; Van den Heuvel-Panhuizen, 2002, 2020; Webb & Peck, 2020).

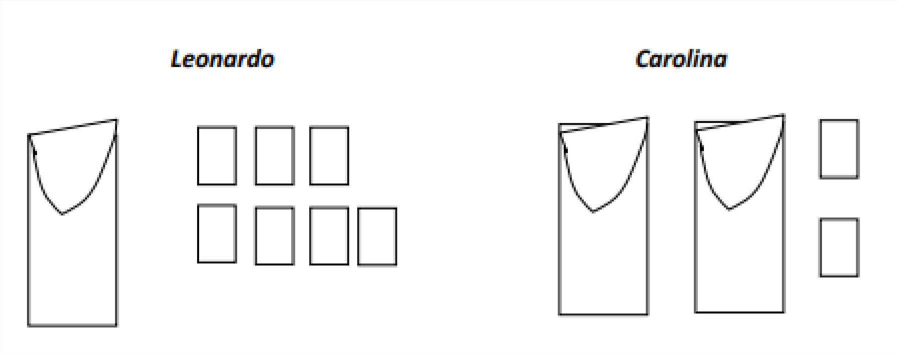
Procesos de matematización| Revista Virtual
Universidad Católica del Norte, **70**, 228-259
ISSN: 0124-5821 (En línea)

Tarea 1 – Boletas

Leonardo y Carolina participan en la rifa de boletas para ingresar a las funciones de un festival de cine. Las boletas están guardadas en sobres, cada uno de los cuales contiene el mismo número de boletas. Leonardo, quien ya tenía 7 boletas, ganó un sobre y Carolina, quien ya tenía 2 boletas, ganó 2 sobres, como se ilustra en la Figura 1. Si ahora los dos quedan con el mismo número de boletas, ¿cuántas boletas contiene cada sobre? (Tarea tomada textual de Mora Moreno, 2019).

Figura 1

Boletas de Leonardo y Carolina



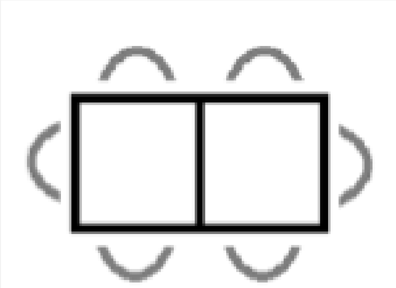
Tarea 2 – Mesas

En un restaurante se juntan mesas cuadradas para los comensales, es decir, que en dos mesas juntas se pueden sentar como máximo seis comensales. La Figura 2 representa la ubicación de los puestos en relación con las mesas juntas por comensales sentados. ¿Cuántos comensales se podrán sentar en cinco mesas juntas?, ¿Cuántos comensales se podrán sentar cuando se tiene una cantidad más grande de mesas juntas? (Tarea tomada textual de Callejo et al., 2016).

ISSN: 0124-5821 (En línea)

Figura 2

Organización de mesas y sillas



Tarea 3 – Punticos

Observa con atención la figura (Figura 3) y responde las preguntas: ¿Cuántos puntos habrá en la cuarta posición?, ¿Cuántos en la quinta posición?, ¿Cuántos hay en la posición 20?, ¿Cuántos puntos hay en la posición 500? Realiza una breve descripción respecto a cómo llegaste a tus respuestas. Si tienes 3005 puntos ¿A qué número de posición corresponde? Relata con detalle cómo obtuviste tu respuesta. 7856 puntos ¿corresponde a una posición de esta secuencia? (Tarea tomada de Vergel et al., 2020).

Figura 3

Posiciones de la secuencia de punticos

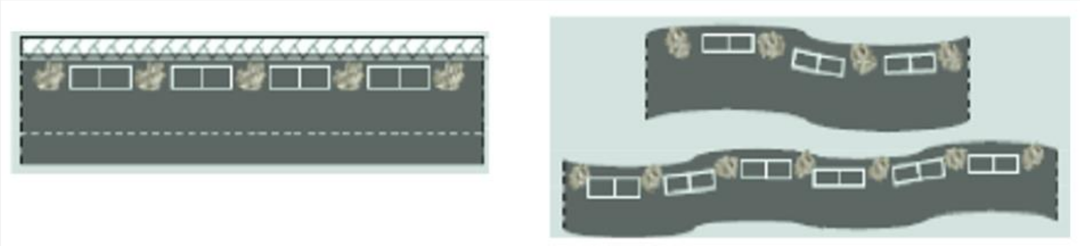
Tarea 4 – Estacionamiento

Un edificio debe organizar los estacionamientos cumpliendo el patrón ilustrado en la figura (Figura 4). Se ubica un árbol, luego dos espacios para estacionamiento y de nuevo un árbol. A lo largo de un bulevar hay 37 árboles plantados. ¿Cuántos estacionamientos se pueden construir en el bulevar? (Tarea adaptada de Sabena & Cusi, 2020).

Procesos de matematización| Revista Virtual Universidad Católica del Norte, **70**, 228-259
ISSN: 0124-5821 (En línea)

Figura 4

Distribución de estacionamientos en el bulevar



Nota. Imagen tomada de Sabena y Cusi (2020).

Análisis de la información

Las principales fuentes de información para el análisis fueron los videos y los registros de representación que produjeron los participantes en el proceso de resolución de las tareas matemáticas realistas. Las videograbaciones fueron transcritas palabra a palabra. Posteriormente, y con apoyo de las transcripciones y de los registros de representación producidos por los participantes en el proceso de solución de las tareas, se observaron una y otra vez los videos para rastrear la actividad matemática. Se siguió un proceso de análisis adaptado de Powell et al. (2003). El propósito del análisis no era contar las ocurrencias de los procesos de matematización, sino ubicar ejemplos de incidentes en los que los participantes avanzaban por diferentes procesos de matematización. En adelante a estos incidentes se le llamarán episodios. Se identificaron las acciones que daban cuenta de los procesos de matematización y se realizaron anotaciones sobre las transcripciones. Se codificaron aquellos episodios que ejemplificaban la actividad matemática y que debían ser estudiados con mayor profundidad.

El proceso de análisis demandó volver reiteradamente sobre los videos y las transcripciones e ir contrastando la información aportada por los participantes con el marco teórico. La validación del proceso de análisis se garantizó mediante las múltiples fuentes de información y la discusión entre las investigadoras. Para la presentación de los resultados se eligieron aquellos episodios que mejor ilustraban los procesos de matematización. Los procesos de matematización están relacionados con las acciones que emprenden las personas al hacer matemáticas. Es decir, esos procesos que tienen que ver con cómo las personas *identifican y clasifican la información*, *identifican incoherencias*, *realizan esquemas*, *buscan y encuentran atajos*, *analizan tendencias*, *ponen a prueba conjeturas*, *estiman resultados*, *encuentran patrones*, *cambian de estrategias*, *cuentan*, *deducen* y *formalizan* situaciones de las tareas matemáticas realistas (Bressan & Gallego, 2010; Gravemeijer, 2020; Gravemeijer & Doorman, 1999; Van den Heuvel-Panhuizen, 2005; Webb & Peck, 2020; Zolkower et al., 2020).

Resultados

En este apartado se presentan los procesos de matematización que emergieron de los participantes al solucionar las tareas matemáticas realistas. Esos procesos de matematización se ilustran con algunos episodios de las entrevistas.

Representación mental para apoyar el conteo

En la solución de la tarea 2, la de las mesas, la participante Luisa (noveno grado, 14 años) se apoyó en la *representación visual* que fue presentada y a partir de allí generó una *representación mental*. Ella expresó que podría incluir una mesa en la mitad de las dos que ya estaban dispuestas y *así determinó* el total de sillas. El siguiente episodio de la entrevista con Luisa ilustra esta estrategia.

1. Investigadora: Si colocamos otra mesa ¿Cuántas personas se podrían sentar?
2. Luisa: Ocho
3. Investigadora: ¿Me podrías explicar que hiciste para determinar eso?
4. Luisa: Agregué una mesa en la mitad (Entrevista Luisa, marzo 30 2021)

En la línea 4 se puede apreciar que la participante conservó las dos mesas dadas en los extremos e incluyó una mesa en el centro. La participante transformó la representación visual, usó una estrategia vinculada al contexto coordinando con una *representación mental* y con el conteo para determinar el total de sillas. Una representación mental es de naturaleza inobservable y surge de la reproducción en la mente como respuesta a una representación externa (Rico Romero, 2009). Las representaciones son las formas de plasmar las ideas y procedimientos matemáticos (Alsina,

Procesos de matematización| Revista Virtual
Universidad Católica del Norte, **70**, 228-259
ISSN: 0124-5821 (En línea)

2016). En general, las representaciones observables pueden ser verbales, pictóricas, numéricas y simbólicas (Merino et al., 2013). Así, las representaciones mentales son formas de reproducir en la mente, de quien resuelve la tarea; ideas expresadas en enunciados verbales, imágenes, expresiones algebraicas o símbolos. En el caso de la participante Luisa, ella expresó la idea de la mesa en el medio como una modificación de la imagen inicial que acompañó la presentación de la tarea y luego usó el conteo para determinar el total de sillas.

De acuerdo con Zolkower et al. (2006) en la educación matemática realista el contexto, al ser susceptible de ser imaginado, es realista, y según Gravemeijer y Doorman (1999) ese es el punto de partida para la actividad matemática o matematización. El episodio citado ilustra que Luisa interpretó la situación problemática y usó estrategias vinculadas totalmente al contexto de la situación misma para darle sentido. Ella se apoyó en su conocimiento informal, su sentido común y su experiencia para identificar y describir la matemática detrás del contexto, visualizar y esquematizar. Se podría inferir que la representación mental empleada por Luisa en la tarea 2 es uno de los procesos de matematización que se encuentran enmarcados en el nivel situacional y que permitió *establecer conexiones* con la imagen de apoyo frente a los requerimientos de la tarea matemática realista.

Uso del tanteo con apoyo de la suma

La tarea 1, que pedía determinar el número de boletas en los sobres, fue resuelta por todos los participantes mediante el tanteo. El tanteo es un proceso de solución que no sigue una estructura formal o algebraica, sino que se hacen múltiples ensayos con valores diferentes, algunas veces sistemáticos, hasta que se encuentra el resultado. Según Radford (2015), el tanteo es una estrategia de naturaleza aritmética. El tanteo es un proceso de matematización porque vincula la utilización de las matemáticas y el razonamiento para encontrar las posibles soluciones. Sin embargo, el tanteo es una estrategia informal de matematizar. Las estrategias informales son todos aquellos procedimientos adquiridos a partir de la intuición (de Castro Hernández et al., 2015) o que se aprenden en el marco de experiencias informales (Alsina, 2017). A continuación, un episodio en la solución de la tarea de las boletas con el participante Augusto (grado noveno, 14 años).

5. Investigadora: ¿Cuántas boletas contiene cada sobre?

Procesos de matematización| Revista Virtual Universidad Católica del Norte, **70**, 228-259
ISSN: 0124-5821 (En línea)

6. Augusto: Cinco boletas

7. Investigadora: ¿Podrías explicarme cómo lo hiciste?

8. Augusto: Leonardo tenía más boletas que Carolina, pero solamente se ganó un sobre, entonces era fácil

9. afirmar haciendo cuentas rápidas y fáciles, por ejemplo: yo hice primero con una, después

10. con dos hasta que llegué a cinco. Tenían de a cinco, pues siete más cinco es doce y así se

11. sabía el contenido de cada sobre (Entrevista Augusto, 15 de marzo 2021).

El participante Augusto *usó el tanteo*; fue evidente que lo hizo de forma sistemática, y luego validó el resultado en el contexto de la tarea mediante la suma. El participante intentó con diferentes valores y aplicó la suma hasta que se cumplió la igualdad. En este episodio se evidencia que el participante diseñó un esquema para la aplicación de un procedimiento y lo ensayó ordenadamente hasta encontrar la respuesta que satisfacía las condiciones de la tarea. El contexto de la tarea realista le sirvió de referente para comprobar los resultados. El episodio ilustra un *nivel referencial* de matematización. En este nivel persiste la referencia al contexto, pero para propósitos diferentes al del nivel situacional (Freudental, 2006). El contexto aparece para ayudar en la representación inicial del problema, luego se abandona para centrarse en las relaciones matemáticas y se regresa a él para la validación de resultados.

Identificación de patrones de formación usando atajos

En la solución de la tarea 3 de los punticos, los participantes presentaron diferentes soluciones relacionadas con la *identificación de patrones de formación*. La identificación de patrones requiere el reconocimiento de semejanzas y diferencias entre los elementos de una secuencia. Un patrón es una sucesión de elementos que se construye siguiendo una regla o algoritmo, ya sea de repetición o recurrencia (Bressan & Gallego, 2010). Se puede identificar un patrón mediante la observación de las regularidades de los elementos de la secuencia. Cuando los elementos de una secuencia se presentan en forma periódica es un patrón de repetición, como por ejemplo la secuencia de la tarea de los parqueaderos A, P, P, A, P, P, A, P, P, A, P, P, A donde

Procesos de matematización| Revista Virtual
Universidad Católica del Norte, **70**, 228-259
ISSN: 0124-5821 (En línea)

primero va un árbol (A) y luego dos parqueaderos (P) y continúa repitiéndose la secuencia hasta que finaliza con un árbol.

Cuando cada término de la sucesión se expresa en función del término anterior se denomina patrón de recurrencia, como por ejemplo la secuencia de la tarea de los puntos que numéricamente se representa de la forma 3, 5, 7, 9…, y cada término es el resultado de adicionarle 2 al término anterior; por tanto, para cualquier término se cumple la igualdad $a_n = a_{n-1} + 2$. El siguiente episodio ilustra el momento donde el participante Juan (grado octavo, 13 años) identificó un patrón en la tarea de punticos.

12. Investigadora: ¿Cuántos puntos habrá en la posición 4?

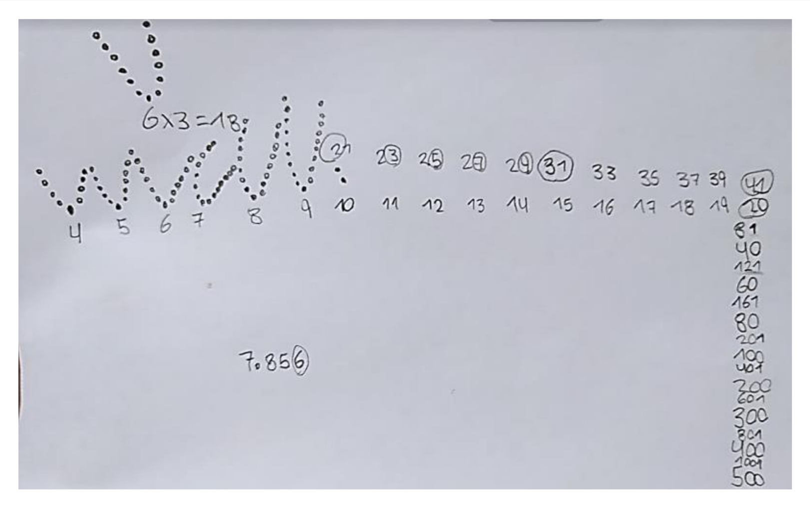
13. Juan: Si en la primera hay tres, en la segunda hay cinco y en la tercera hay siete,

14. serían nueve. Se suman de a dos. (Entrevista Juan, 3 de abril, 2021)

El participante Juan en las líneas 13 – 14 *descubrió la regla de formación* de la secuencia. A partir de la observación de la Figura 3, Juan *dedujo la razón de la sucesión* que es dos. Él concluyó que al sumar dos a la figura inicial lograría predecir la cantidad de puntos que tendría la siguiente posición. Por tanto, logró *encontrar el patrón* de *recurrencia* que surgía al sumar dos al término anterior. La Figura 5 es una representación desarrollada por el participante Juan y que corresponde a la progresión recurrente de la sucesión.

Figura 5

Representación realizada por el participante Juan en la tarea de los punticos



Procesos de matematización| Revista Virtual Universidad Católica del Norte, **70**, 228-259
ISSN: 0124-5821 (En línea)

Posteriormente, se le preguntó a Juan por la cantidad de puntos en la posición veinte, y el participante realizó un cambio en la *representación del patrón identificado*. Se puede apreciar en la Figura 5 que cuando pasa de la posición 9 a la 10, el participante Juan cambió las representaciones gráficas a numéricas correspondiente al total de puntos en cada posición. En este caso, el participante Juan intentó ser eficiente, por eso cambió su representación y *buscó un atajo* para evitar el camino largo. Rodríguez Quintero y Juárez López (2019) han sugerido que la mente busca atajos para elaborar estrategias más eficientes y para evitar caminos largos. Posiblemente el participante descartó la representación gráfica en búsqueda de simplificar y optimizar sus acciones para dar respuesta a la pregunta planteada. La matematización es un proceso de reorganización que resulta en *atajos* mediante el uso de conexiones entre conceptos y estrategias (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014). En consecuencia, del cambio de representación optimizando la forma de resolver la tarea es un atajo.

Además, la Figura 5 también da cuenta de que el participante Juan logró *deducir un patrón de repetición* mientras iba encerrando con un círculo los números impares correspondientes al segundo dígito (3,5,7,9,1) de la cantidad de puntos en las posiciones 11 a 14, los cuales se repetían nuevamente de la posición 15 a la 20. Los patrones de repetición dan cuenta de la identificación de regularidades y secuencias, y son un paso conceptual para la generalización (Bressan & Gallego, 2010). Luego, el participante identificó *la correspondencia* y *covariación* a partir de la posición 20. Cuando se le pidió encontrar el número de puntos en la posición 500, primero incrementó de veinte en veinte hasta llegar a 100 y luego cambió la estrategia incrementando de cien en cien hasta llegar a 500. Allí aplicó la regla de formación que ya había deducido previamente. Los estudiantes aprenden a visualizar *la correspondencia* en aspectos cuantificables de figuras con posición/número de elementos y atienden a la *covariación* con un tipo particular de crecimiento a medida que los aspectos cuantificables cambian en cada figura de la secuencia (Wilkie, 2022).

El participante Juan hasta ese momento del desarrollo de la tarea *deduјo la razón de la sucesión, descubrió la regla de formación, identificó dos patrones de incremento (uno de recurrencia y otro de repetición), realizó una representación pictórica y una numérica, buscó atajos*. En los diferentes procesos de matematización por los que transitó el participante, se observó la deducción de patrones con una focalización matemática que supera la referencia al contexto. Es decir, poco a poco se va desligando de la situación contextual hasta adquirir el carácter de un

Procesos de matematización| Revista Virtual
Universidad Católica del Norte, **70**, 228-259
ISSN: 0124-5821 (En línea)

modelo. El participante usó la regla de formación (un modelo) descubierta en las primeras posiciones de la secuencia para encontrar las cantidades en posiciones más avanzadas. Este episodio con el participante Juan es una evidencia de un *nivel general* de matematización.

Identificación de relaciones funcionales

El *establecimiento de relaciones funcionales* es un proceso de matematización formal. El establecimiento de la relación funcional como una relación de dependencia entre dos cantidades covariantes se origina con la *deducción de un patrón de formación* y da origen a la posterior *generalización* (Cañadas & Molina, 2016). A continuación, un episodio del participante Luis (noveno grado, 15 años) en el que estableció una relación funcional usando el lenguaje numérico mientras resolvía la tarea de las mesas.

15. Investigadora: ¿Y si te digo que para cien mesas?

16. Luis: Si por cada mesa se sientan dos personas, entonces multiplico dos por cien.

17. Investigadora: ¿Y ese sería el total de las personas?

18. Luis: Sería el total y solamente habría que sumarle dos sillas más. (Entrevista Luis, 28 de febrero 2021)

La *identificación del patrón de formación* se considera un paso previo a la generalización, la cual a la vez se entiende como el establecimiento de reglas que logran deducir el valor correspondiente para posiciones lejanas en la serie. Por ejemplo, cuando un estudiante es capaz de llegar al número de elementos de la posición 100 en una serie, usando la regla de formación, se puede decir que ha logrado generalizar (Callejo & Zapatera, 2017; El Mouhayar & Jurdak, 2013). En consecuencia, cuando el participante Luis logra encontrar el número de sillas requerido para 100 mesas es un indicio de generalización.

La generalización implica descubrir la regla general mediante la coordinación del número de elementos de un término y la posición de cada término de la serie (Radford, 2011). Cuando los estudiantes descomponen la secuencia para establecer la relación entre la posición en la secuencia y el número de elementos que la componen están coordinando dos estructuras y logran establecer una relación funcional (Callejo & Zapatera, 2017). Por lo cual, cuando se logra generalizar

Procesos de matematización| Revista Virtual Universidad Católica del Norte, **70**, 228-259
ISSN: 0124-5821 (En línea)

mediante el establecimiento de reglas, se está estableciendo una relación funcional que aplica para cada término de la serie.

Se evidenció el *establecimiento de la relación funcional* por parte del participante Luis en una secuencia de pasos que llevan un orden lógico. Inicialmente, el participante identificó que por cada mesa adicional se sentaban dos personas más, lo que correspondía al patrón de formación. Luego, en la generalización, el participante multiplicó por dos el total de mesas y adicionalmente consideró el valor constante debido a las dos sillas de los extremos.

La relación de correspondencia entre las mesas y las sillas se estableció cuando el participante identificó que por cada mesa podían acomodarse dos sillas adicionales. La relación funcional se generalizó cuando el participante enunció la relación de correspondencia entre el número de sillas concerniente a cada mesa, usando la multiplicación, y luego usó la adición para agregar las dos sillas que tenían un comportamiento diferente a las demás. La multiplicación por dos representa la *covariación* del pensamiento proporcional entre las mesas y las sillas. La adición del valor constante y la correspondencia da cuenta de la identificación de una relación funcional del tipo $y=2x+2$ donde y es el número de sillas y x el número de mesas. El episodio del participante Luis es un ejemplo de un *nivel formal* de matematización, el cual permite el establecimiento de reglas y el uso de reglas para hacer predicciones (Gravemeijer, 2020).

Discusión

Este estudio permitió evidenciar en las acciones de los participantes múltiples procesos de matematización, tales como conteo, tanteo, identificación de patrones de formación y establecimiento de relaciones funcionales. Estas acciones de la actividad matemática son coherentes con esa idea de matematización progresiva que sugiere la corriente de la educación matemática realista que va desde el nivel situacional —primitivo y contextual— hasta un nivel formal que es mucho más refinado (Trelles-Zambrano et al., 2019).

Los participantes emprendieron acciones que evidenciaron diversos procesos de matematización: *conteo, tanteo, establecimiento de relaciones, identificación de patrones o reglas de formación, búsqueda de atajos, generalización, identificación de relaciones funcionales, correspondencia, covariación y formalización*. Algunos participantes migraron de un lenguaje

Procesos de matematización| Revista Virtual
Universidad Católica del Norte, **70**, 228-259
ISSN: 0124-5821 (En línea)

informal, basado en la descripción de la situación contextual, a un lenguaje matemático logrando la formalización que es un nivel superior de evolución. Este nivel de formalización se ha entendido como el proceso de adornar, ajustar y transformar el lenguaje común a un lenguaje formal (Freudenthal, 2006).

Esto no sólo tiene que ver con un asunto estético o de reorganización, sino con la institucionalización de las formas matemáticas. Al final, la formalización se puede entender como el resultado de traducir ese aspecto realista del contexto al mundo formal matemático que se espera que todos los estudiantes alcancen. Estos hallazgos coinciden con resultados de estudios previos que han mostrado que asumir la corriente de la educación matemática realista en la formación matemática de los estudiantes influye sobre sus habilidades de resolución de problemas y sobre sus habilidades de razonamiento crítico (Ariati & Juandi, 2022).

Partir de la propia actividad matemática de los estudiantes para darle forma a sus conocimientos y habilidades parece ser coherente con esa idea de aprendizaje gradual propuesta por Freudental (2006), en la cual los individuos evolucionan en los recursos que utilizan para matematizar (Van den Heuvel-Panhuizen, 2002). Otros estudios han sugerido que el estudiante, a partir de las tareas matemáticas realistas, puede desarrollar nuevas ideas matemáticas con su propia actividad (Gravemeijer, 2007). Quizás vincular las reflexiones sobre estas evidencias de matematización en los procesos de formación de profesores de matemáticas podría ser una respuesta al mejoramiento continuo que los mismos profesores reclaman en su actividad profesional (Martínez-Castro et al., 2020).

Explorar en los estudiantes los diferentes procesos de matematización, les ofrece la oportunidad de reconocer usos y significados de las matemáticas en diferentes esferas del entorno social y natural. El discurso y las representaciones de los participantes hicieron evidente ciertos procesos de matematización. En el surgimiento de estos procesos, los participantes experimentaron las matemáticas no como una repetición rutinaria de procedimientos, sino como una actividad de construcción creativa que tiene un fuerte vínculo con el sentido común. No sorprende entonces la declaración de Gravemeijer (2020) quien propone que las tareas matemáticas realistas deben incitar a los estudiantes a pensar matemáticamente y a resolver creativamente problemas abiertos y desconocidos.

Procesos de matematización| Revista Virtual
Universidad Católica del Norte, **70**, 228-259
ISSN: 0124-5821 (En línea)

Los resultados descritos en este estudio son consistentes con los resultados de estudios anteriores dentro de esta misma corriente de investigación que han evidenciado el valor del sentido común (Dekker, 2020), la influencia del contexto (Gravemeijer, 2020), las innumerables formas de representación (Van den Heuvel-Panhuizen, 2002) en los procesos de matematización y los efectos sobre las habilidades matemáticas de los estudiantes (Ariati & Juandi, 2022). No obstante, uno de los resultados novedosos de este estudio es la descripción detallada de esos procesos de matematización por los que evolucionan los estudiantes y que generalmente quedan ocultos en el aprendizaje y, en algunas ocasiones, en la investigación educativa (Monsalve-López, 2022).

Otro resultado destacable que revela este estudio es que sin importar el desempeño académico con el que los estudiantes iniciaron su participación, todos pudieron experimentar alguna forma de contacto con el que hacer matemático y trabajaron en diferentes niveles de conceptualización de acuerdo con sus posibilidades. Algunos participantes se ubicaron en niveles informales y otros en niveles formales. Esta es una forma de tornar accesible el contenido matemático.

En la educación matemática realista el papel del docente incluye plantear las tareas y las preguntas que permitan fomentar el pensamiento en los estudiantes como una forma de ayudar a construir su comprensión (Gravemeijer, 2020). Las preguntas usadas en el protocolo de entrevista, como: “¿Qué hiciste para determinar eso?, ¿Me podrías explicar qué estás pensando?, ¿Podrías explicarme cómo lo hiciste?” invitaron a la reflexión y permitieron que los estudiantes explicaran, argumentaran y justificaran sus soluciones. Las preguntas del protocolo fueron fundamentales para hacer evidente los procesos de matematización por los que avanzaron los participantes. La investigación educativa ha mostrado que el tipo de preguntas que se hace a los estudiantes determina el tipo de matemáticas que se construye en el aula (Zapata-Cardona, 2012). El profesor en el aula de matemáticas puede, a partir de las preguntas, ayudar al estudiante a generar reflexiones que conlleven a reinventar su propia caja de herramientas para facilitar los procesos de matematización. El rol del docente es fundamental para comprender los diversos procesos de pensamiento de los estudiantes y así tener oportunidad de guiarlos a soluciones más refinadas, novedosas y mucho más formales.

Procesos de matematización| Revista Virtual Universidad Católica del Norte, **70**, 228-259
ISSN: 0124-5821 (En línea)

Conclusiones

Esta investigación permitió evidenciar algunos procesos de matematización que emergen de los participantes cuando resuelven tareas matemáticas realistas. Algunos de los procesos de matematización que se hicieron evidentes fueron: *conteo, tanteo, identificación de patrones, búsqueda de atajos, argumentación, identificación y clasificación de información relevante, generalización, identificación de relaciones funcionales, correspondencia, covariación y formalización.* También, se pudo evidenciar una transición del uso de un lenguaje informal, basado en la descripción de la situación contextual, a expresiones matemáticas mucho más estructuradas.

Algunos participantes revelaron procesos de matematización primitivos que eran seguidos por procesos de matematización más avanzados y complejos; otros participantes evidenciaron procesos mucho más formales. Hacer evidente los diferentes procesos de matematización y los diferentes niveles puede ser un recurso para ayudar a los docentes a reflexionar sobre la enseñanza de las matemáticas y a comprender las múltiples estrategias que ponen en juego los estudiantes para llegar a la formalización matemática.

Las soluciones planteadas y los procesos de matematización usados por los participantes no fueron únicos. Algunos de esos procesos de matematización permitieron alcanzar la formalización. La variedad en los procesos de formalización se dio gracias a que los participantes pusieron en juego diferentes recursos para identificar la información, para interpretarla y para estructurarla. Las diversas rutas para llegar a formalizar podrían ser un insumo importante para ayudar a los docentes a reconocer y estimular el uso de las estrategias alternas en sus estudiantes al resolver tareas matemáticas.

Una posible implicación práctica de este estudio tiene que ver con la formación docente. Los diferentes procesos de matematización que se describen en este estudio pueden ser un insumo importante para orientar la reflexión en los procesos de formación de profesores frente al cómo, el qué, el cuándo y el para qué de su enseñanza. Los resultados de este estudio también pueden informar la investigación en el campo de la educación matemática. En este estudio se usaron tareas realistas de naturaleza algébrica, pero valdría la pena indagar si los resultados son consistentes al usar tareas menos estructuradas y mucho más abiertas.

Procesos de matematización| Revista Virtual
Universidad Católica del Norte, **70**, 228-259
ISSN: 0124-5821 (En línea)

Referencias

Alagia, H., Bressan, A. M., & Sadovsky, P. (2005). *Reflexiones teóricas para la educación matemática*. Libros del Zorzal.

Alsina, Á. (2016). Diseño, gestión y evaluación de actividades matemáticas competenciales en el aula. *Revista Épsilon*, *33*(92), 7-29. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5587561

Alsina, Á. (2017). *Matemáticas intuitivas e informales de 0 a 3 años: Elementos para empezar bien.* Narcea.

Ariati, C., Anzani, V., Juandi, D., & Hasanah, A. (2022). Meta-analysis study: effect of realistic mathematics education (RME) approach on student's mathematical literacy skill [Estudio de metanálisis: efecto del enfoque de educación matemática realista (EMR) en las habilidades de alfabetización matemática del estudiante]. *AKSIOMA: Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika*, *11*(4), 2953-2963. https://doi.org/10.24127/ajpm.v11i4.6182

Ariati, C., & Juandi, D. (2022). Realistic mathematic education on higher-order thinking skill mathematics of students [Educación matemática realista sobre las habilidades matemáticas de orden superior de los estudiantes]. *Kalamatika: Jurnal Pendidikan Matematika*, *7*(2), 219-236. https://doi.org/10.22236/KALAMATIKA.vol7no2.2022pp219-236

Bressan, A., & Gallego, M. F. (2010). El proceso de matematización progresiva en el tratamiento de patrones | GPDM. *Correo del Maestro*, *168*, 5-21. https://new.gpdmatematica.ar/el-proceso-de-matematizacion-progresiva-en-el-tratamiento-de-patrones/

Callejo, M. L., García-Reche, Á., & Fernández, C. (2016). Evolución del pensamiento algebraico temprano en estudiantes de Educación Primaria (6-12 años) en problemas de generalización lineal. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (10), 5-25. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i10.106

Callejo, M. L., & Zapatera, A. (2017). Prospective primary teachers' noticing of students' understanding of pattern generalization [El reconocimiento de la comprensión de los estudiantes en la generalización de patrones por futuros maestros de primaria]. *Journal of*

Mathematics Teacher Education, *20*(4), 309-333. https://doi.org/10.1007/s10857-016-9343-1

Cañadas, M. C., & Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz-Hidalgo, & M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares. http://funes.uniandes.edu.co/8379/

Creswell, J. W. (2014). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches* [Indagación cualitativa y diseño de investigación: elegir entre cinco enfoques] (4.ª ed.). Sage publications.

De Castro Hernández, C., Flecha López, G., & Ramírez García, M. (2015). Matemáticas con dos años: Buscando teorías para interpretar la actividad infantil y las prácticas docentes. *Tendencias Pedagógicas*, *26*, 89-108. https://revistas.uam.es/tendenciaspedagogicas/article/view/2123

Dekker, R. (2020). Mathematics and Common Sense - The Dutch School [Matemáticas y sentido común - La escuela holandesa]. En M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *National Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics: Teaching and Learning in the Context of Realistic Mathematics Education* (pp. 55-61). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-33824-4_4

El Mouhayar, R. R., & Jurdak, M. E. (2013). Teachers' ability to identify and explain students' actions in near and far figural pattern generalization tasks [La capacidad de los maestros para identificar y explicar las acciones de los estudiantes en tareas de generalización de patrones figurativos cercanos y lejanos]. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(3), 379-396. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9434-6

Freudenthal, H. (2006). *Revisiting mathematics education: China lectures* [Revisitando la educación matemática: conferencias en China] (Vol. 9). Springer Science & Business Media.

Gravemeijer, K. (2007). *Emergent modeling and iterative processes of design and improvement in mathematics education* [Modelado emergente y procesos iterativos de diseño y mejora en la educación matemática] [Conference]. Plenary lecture at the APEC-TSUKUBA

International Conference III, Innovation of Classroom Teaching and Learning through Lesson Study.

Gravemeijer, K. (2020). A Socio-Constructivist Elaboration of Realistic Mathematics Education [Una elaboración socioconstructivista de la educación matemática realista]. En M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *National Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics: Teaching and Learning in the Context of Realistic Mathematics Education* (pp. 217-233). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-33824-4_12

Gravemeijer, K., Bruin-Muurling, G., Kraemer, J.-M., & Van Stiphout, I. (2016). Shortcomings of Mathematics Education Reform in The Netherlands: A Paradigm Case? [Deficiencias de la reforma de la educación matemática en los Países Bajos: ¿un caso paradigmático?]. *Mathematical Thinking and Learning*, *18*(1), 25-44. https://doi.org/10.1080/10986065.2016.110781

Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context Problems in Realistic Mathematics Education: A Calculus Course as an Example [Problemas de contexto en la educación matemática realista: un curso de cálculo como ejemplo]. *Educational Studies in Mathematics*, *39*(1), 111-129. https://doi.org/10.1023/A:1003749919816

Gutiérrez, R. E., Prieto, J. L., & Ortiz Buitrago, J. (2017). Matematización y trabajo matemático en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *Educación Matemática*, *29*(2), 37-68. https://doi.org/10.24844/em2902.02

Hernández, R., Fernández, C., & Bautista, P. (2014). *Metodología de la Investigación* (6ª ed.). McGraw-Hill Education.

Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K., Hollingsworth, H., Jacobs, J., Miu-Ying Chui, A., Wearne, D., Smith, M., Kersting, N., Manaster, A., Tseng, E., Etterbeek, W., Manaster, C., Gonzales, P., & Stigler, J. (2003). *Teaching mathematics in seven countries: Results from the TIMSS 1999 video study* [Enseñanza de las matemáticas en siete países: resultados del estudio de vídeo TIMSS 1999]. National Center for Educational Statistics. https://nces.ed.gov/pubs2003/2003013.pdf

Jiménez, L., & Ramos, F. J. (2011). El impacto negativo del contrato didáctico en la resolución realista de problemas. Un estudio con alumnos de 2º y 3º de Educación Primaria. *Electronic*

Journal of Research in Education Psychology, *9*(25), 1155-1182. https://doi.org/10.25115/ejrep.v9i25.1499

Jiménez, L., & Verschaffel, L. (2014). Development of children's solutions of non-standard arithmetic word problem solving [Desarrollo de las soluciones de los niños en la solución de problemas verbales aritméticos no estándar]. *Revista de Psicodidáctica*, *19*(1), 93-123. https://doi.org/10/48298

Jupri, A., Drijvers, P., & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Difficulties in initial algebra learning in Indonesia [Dificultades en el aprendizaje inicial de álgebra en Indonesia]. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(4), 683-710. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0097-0

Martínez-Castro, C. A., Zapata-Cardona, L., & Castro, W. F. (2020, enero-abril). ¿Qué dicen los profesores que enseñan matemáticas sobre las bondades y limitaciones de la evaluación docente? *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (59), 71-90. https://doi.org/10.35575/rvucn.n59a5

Merino, E., Cañadas, M. C., & Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *2*(1), 24-40. https://doi.org/10.24197/edmain.1.2013.24-40

Monsalve-López, D. L. (2022). *Procesos de matematización que emergen de los estudiantes en la solución de tareas matemáticas en contextos realistas* [Tesis de maestría, Universidad de Antioquia]. Repositorio digital institucional. https://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/32864/1/MonsalveDennis_2022_ProcesosMatematizaci%C3%B3nTareas.pdf

Mora Moreno, C. A. (2019). *Desarrollo de pensamiento científico y lógico matemático* [Trabajo de grado, Universidad Distrital Francisco José Caldas]. Repositorio institucional. http://hdl.handle.net/11349/23631

Mullis, I. V. A., Martin, M. O., Gonzalez, E. J., & Chrostowski, S. J. (2004). *TIMSS 2003 international mathematics report. Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the fourth and eighth grades* [Informe internacional de matemáticas TIMSS 2003. Hallazgos del estudio de Tendencias Internacionales en

Matemáticas y Ciencias de la IEA en cuarto y octavo grado]. Boston College. https://timss.bc.edu/pdf/t03_download/t03intlmatrpt.pdf

Orrantia, J., González, L. B., & Vicente, S. (2005). Analysing arithmetic word problems in Primary Education textbooks [Análisis de problemas verbales de aritmética en los libros de texto de Educación Primaria]. *Journal for the Study of Education and Development*, *28*(4), 429-451. https://doi.org/10.1174/021037005774518929

Ponte, J. P., & Brocardo, J. (2020). Echoes and Influences of Realistic Mathematics Education in Portugal [Ecos e influencias de la educación matemática realista en Portugal]. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics Visions on and Experiences with Realistic Mathematics Education* (pp. 209-228). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-20223-1

Powell, A. B., Francisco, J. M., & Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data [Un modelo analítico para estudiar el desarrollo de las ideas matemáticas y el razonamiento de los estudiantes utilizando datos de video]. *The Journal of Mathematical Behavior*, *22*(4), 405-435. https://doi.org/10.1016/J.JMATHB.2003.09.002

Phan, T. T., Do, T. T., Trinh, T. H., Tran, T., Duong, H. T., Trinh, T. P. T., Do, B. C., & Nguyen, T. T. (2022). A bibliometric review on realistic mathematics education in Scopus database between 1972-2019 [Una revisión bibliométrica sobre educación matemática realista en la base de datos Scopus entre 1972-2019]. *European Journal of Educational Research*, *11*(2), 1133-1149. https://doi.org/10.12973/eu-jer.11.2.1133

Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking [Encarnación, percepción y símbolos en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano]. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 17-24). PME.

Radford, L. (2015). Early Algebraic Thinking: Epistemological, Semiotic, and Developmental Issues [Pensamiento algebraico temprano: cuestiones epistemológicas, semióticas y de desarrollo]. S. J. CHO (Org.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 209-227). Springer International Publishing. http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-12688-3_15

Ramos, S. E. (2005). Análisis socioepistemológico de los procesos de matematización de la predicción en la economía. En J. Lezama, M. Sánchez, & J. G. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 18, pp. 631-637). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. http://funes.uniandes.edu.co/6162/

Reusser, K., & Stebler, R. (1997). Every word problem has a solution—The social rationality of mathematical modeling in schools [Cada problema verbal tiene una solución: la racionalidad social de los modelos matemáticos en las escuelas]. *Learning and Instruction*, *7*(4), 309-327. https://doi.org/10.1016/S0959-4752(97)00014-5

Rico Romero, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, *4*(1), 1-14. https://doi.org/10.30827/pna.v4i1.6172

Rodríguez Quintero, T., & Juárez López, J. A. (2019). Estrategias de cálculo mental empleadas por una alumna de segundo grado de primaria: El caso de Luisa. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, (102), 67-81. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7160271

Sabena, C., & Cusi, A. (2020). The role of the teacher in fostering students' evolution across different layers of generalization by means of argumentation [El papel del profesor en el fomento de la evolución de los estudiantes a través de diferentes capas de generalización por medio de la argumentación]. *RECME - Revista Colombiana de Matemática Educativa*, *5*(2), 93-105. https://iris.unito.it/retrieve/handle/2318/1768412/697772/2020_Cusi%26amp%3BSabena_RECME_print.pdf

Sánchez Gamboa, S. (1998). *Fundamentos para la investigación educativa: Presupuestos epistemológicos que orientan al investigador*. Cooperativa Magisterio.

Sitorus, J., & Masrayati. (2016). Students' creative thinking process stages: Implementation of realistic mathematics education [Etapas del proceso de pensamiento creativo de los estudiantes: implementación de la educación matemática realista]. *Thinking Skills and Creativity*, *22*, 111-120. https://doi.org/10.1016/j.tsc.2016.09.007

Sumirattana, S., Makanong, A., & Thipkong, S. (2017). Using realistic mathematics education and the DAPIC problem-solving process to enhance secondary school students' mathematical literacy [Uso de la educación matemática realista y el proceso de resolución de problemas

DAPIC para mejorar la competencia matemática de los estudiantes de secundaria]. *Kasetsart Journal of Social Sciences*, *38*(3), 307-315. https://doi.org/10.1016/j.kjss.2016.06.001

Treffers, A. (1991). Realistic Mathematics Education in the Netherlands 1980-1990 [Educación matemática realista en los Países Bajos 1980-1990]. En L. Streefland (Ed.), *Realistic Mathematics Education in Primary School*. CD-b Press. IF Utrecht University.

Trelles-Zambrano, C., Toalongo, X., Alsina, Á., & Gonzáles, N. (2019). La modelización matemática a través de las actividades generadoras de modelos: Una propuesta para el aula de secundaria. *Revista Épsilon*, (102), 43-59. https://thales.cica.es/epsilon_d9/node/4799

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2002). Realistic Mathematics Education as work in progress [La educación matemática realista como trabajo en progreso]. *Common Sense in Mathematics Education*, 1-43. https://www.icrme.net/uploads/1/0/9/8/109819470/boulder_progress_091012final-website.pdf

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2005). Can scientific research answer the 'what' question of mathematics education? [¿Puede la investigación científica responder a la pregunta del "qué" de la educación matemática?]. *Cambridge Journal of Education*, *35*(1), 35-53. https://doi.org/10.1080/0305764042000332489

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2020). A Spotlight on Mathematics Education in the Netherlands and the Central Role of Realistic Mathematics Education [Un vistazo a la educación matemática en los Países Bajos y el papel central de la educación matemática realista]. En *National Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics* (pp. 1-14). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-33824-4_1

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2014). Realistic Mathematics Education [Educación matemática realista]. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 521-525). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_170

Vergel, R., González, L., & Miranda, I. (2020). La relación de dependencia entre variables: Un análisis desde la teoría de la objetivación. *RECME - Revista Colombiana de Matemática*

Procesos de matematización| Revista Virtual Universidad Católica del Norte, **70**, 228-259
ISSN: 0124-5821 (En línea)

Educativa, *5*(2), 67-81. http://funes.uniandes.edu.co/22716/1/365-Texto_del_art%C3%ADculo-1703-2-10-20200823.pdf

Vergel, R., & Rojas, P. (2018). *Álgebra escolar y pensamiento algebraico: Aportes para el trabajo en el aula*. Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Vos, P. (2020). Task Contexts in Dutch Mathematics Education [Contextos de las tareas en la educación matemática holandesa]. En M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *National Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics: Teaching and Learning in the Context of Realistic Mathematics Education* (pp. 31-53). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-33824-4_3

Webb, D. C., & Peck, F. A. (2020). From Tinkering to Practice - The Role of Teachers in the Application of Realistic Mathematics Education Principles in the United States [Del retoque a la práctica - El papel de los docentes en la aplicación de los principios de la educación matemática realista en los Estados Unidos]. En M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics: Visions on and Experiences with Realistic Mathematics Education* (pp. 21-39). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-20223-1_2

Wijers, M., & de Haan, D. (2020). Mathematics in Teams—Developing Thinking Skills in Mathematics Education [Matemáticas en equipos: desarrollo de habilidades de pensamiento en la educación matemática]. En M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *National Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics: Teaching and Learning in the Context of Realistic Mathematics Education* (pp. 15-29). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-33824-4_2

Wilkie, K. J. (2022). Generalization of quadratic figural patterns: Shifts in student noticing [Generalización de patrones figurativos cuadráticos: Cambios en la percepción de los estudiantes]. *The Journal of Mathematical Behavior*, *65*, 100917. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100917

Zapata-Cardona, L. (2012). Dime qué preguntas y te diré que promueves en la clase de Estadística. En G. Obando Zapata (Ed.), *Memorias del 13er Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 706-718). Universidad de Medellín. http://funes.uniandes.edu.co/2586/1/DimeZapataAsocolme2012.pdf

Zapata-Cardona, L. (2014). Alcance de las tareas propuestas por los profesores de estadística. *Uni-pluri/versidad*, *1*(14), 53-62. https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.19815

Zapata-Cardona, L. (2020). El rol de las tareas realistas en la interpretación del residuo de la división aritmética. *Uni-pluriversidad*, *20*(2), 1-17. https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.20.2.04

Zolkower, B., Bressan, A., Pérez, S., & Gallego, M. F. (2020). From the Bottom Up—Reinventing Realistic Mathematics Education in Southern Argentina [De abajo hacia arriba: reinventando la educación matemática realista en el sur de Argentina]. En M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics: Visions on and Experiences with Realistic Mathematics Education* (pp. 133-166). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-20223-1_9

Zolkower, B., Bressan, A., & Gallego, F. (2006). La corriente realista de didáctica de la matemática. Experiencias de un grupo de docentes y capacitadores. *Yupana. Revista de Educación Matemática de la UNL*, (3), 11-30. https://doi.org/10.14409/yu.v1i3.247