

### ¿Cómo citar este artículo?

Téllez Acuña, F. R. y Pineda Ballesteros, E. (septiembre-diciembre, 2019). Club de matemáticas para la resolución de problemas usando representaciones múltiples. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (58), 162-179. doi: <https://doi.org/10.35575/rvucn.n58a9>

## | Club de matemáticas para la resolución de problemas usando representaciones múltiples <sup>1</sup>

*Math club for problem solving using multiple representations*

### Freddy Reynaldo Téllez Acuña

Magíster en Potencia Eléctrica, Magíster (c) en Gestión de la Tecnología Educativa  
Universidad Nacional Abierta y a Distancia  
Colombia  
freddy.tellez@unad.edu.co  
Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-1978-0137>

### Elíecer Pineda Ballesteros

Magíster en Informática  
Universidad Nacional Abierta y a Distancia  
Colombia  
eliecer.pineda@unad.edu.co  
Orcid: <https://orcid.org/0000-0003-1331-3084>

**Recibido:** 20 de febrero de 2019    **Evaluado:** 11 de junio de 2019    **Aprobado:** 22 de julio de 2019

**Tipo de artículo:** Investigación científica y tecnológica.

## | Resumen

Este artículo presenta un trabajo alrededor de la implementación de un club de matemáticas. En esta experiencia participaron 12 estudiantes de grado séptimo del Instituto MINCA, de Florida-blanca - Santander, quienes afrontaron cuatro desafíos matemáticos, apoyándose para su solución en las tecnologías de la información –TI-. El objetivo de la investigación fue diseñar e implementar un club de matemáticas, apoyado con TI, para el desarrollo de competencias interpretativas, argumentativas y propositivas. Se empleó un enfoque cualitativo, basado en un estudio descriptivo y exploratorio. Para el diseño del club se usó la metodología de George Polya, para la resolución de problemas, y se empleó software especializado para crear ontologías, realizar procesos de argumentación y modelar fenómenos dinámicos. El diseño del club de matemáticas, así como su implementación, favorecieron en los estudiantes el desarrollo de habilidades para comprender, representar y resolver problemas, en la medida en que fueron mejorando su destreza para dar cuenta de fenómenos dinámicos, consiguiendo de esta forma promover, principalmente, su capacidad crítica, analítica y reflexiva.

**Palabras clave:** Club de Matemáticas, Competencia argumentativa, Educación inclusiva, Resolución de problemas, Representación ontológica.

<sup>1</sup> Título del proyecto de investigación: "Propuesta para la implementación de clubes de matemáticas usando Digalo, Simas y FreeStyler". Grupo de investigación GUANE de la UNAD. Línea de investigación: Gestión de sistemas. Participantes: Freddy Téllez y Elíecer Pineda. Financiado con recursos de la convocatoria SIUNAD: Conformación del banco de proyectos elegibles año 2010. CDP Nro. 1641.

## | Abstract

This paper presents the implementation of a math club. In this experience, 12 seventh grade students from MINCA Institute, in Floridablanca - Santander, participated, who faced four mathematical challenges, supporting themselves for their solution in IT. The aim of the work was to design and implement a mathematics club, supported by IT, for the development of interpretative, argumentative and propositional skills. A qualitative approach, based on a descriptive and exploratory study, was used. To design the club was used George Polya's problem solving methodology and specialized software was used to create ontologies, perform argumentation processes and model dynamic phenomena. The design of the mathematics club, as well as its implementation, favored in the students the development of skills to understand, represent and solve problems, as they improved their ability to explain the dynamic phenomena, thus managing to promote mainly their critical, analytical and reflective capacity.

**Palabras clave:** Math's club, Argumentative skill, Inclusive education, Problem solving, Ontology representation.

## | Introducción

Según la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico –OCDE– (2014), los estudiantes colombianos cercanos a los 15 años están atrasados en el desarrollo de las habilidades matemáticas, en promedio, en alrededor de tres años, con respecto de sus pares en países miembros de esta organización. De los resultados obtenidos por el Instituto MINCA, consultados en la página del Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación –ICFES–, se encontró que el 69% de los estudiantes obtuvo resultados mínimos o insuficientes, el 28% logró un rendimiento satisfactorio, y solo el 3% obtuvo un resultado avanzado en el área de matemáticas (ICFES, 2019). De forma preliminar se estableció que las deficiencias en el rendimiento de los estudiantes, en estas pruebas de Estado, podían obedecer al incipiente desarrollo de sus competencias básicas.

El contexto previamente establecido da cuenta de una situación problema, la cual motivó el desarrollo de la investigación que aquí se presenta; esta situación corresponde concretamente al bajo rendimiento en el área de matemáticas, de los estudiantes del Instituto MINCA, el cual se refleja, entre otros, en los resultados de las pruebas Saber - Grado Noveno.

En este sentido, investigadores como Ruiz, Villamil, Vergel y Aguilar (2018), Iburguen (2017) y Niño (2011), encontraron que el bajo desarrollo de las competencias interpretativas, argumentativas y propositivas, en estudiantes de bachillerato, tiene una significativa repercusión en los resultados de los exámenes de carácter nacional; pruebas que según Restrepo (2013) miden y evalúan competencias para, entre otras áreas del conocimiento, la solución de problemas.

La experiencia en los procesos de representación matemática ha mostrado que los practicantes del modelado estructural desarrollan habilidades para describir, explicar e intervenir fenómenos de diversa índole, que pueden ser vistos como si fueran sistemas (Pineda y Landazábal, 2010). En otras investigaciones, Gamboa y Castro (2016) han señalado que la argumentación permite establecer comunicaciones asertivas en diferentes espacios, al activar el proceso de toma de decisiones y el fortalecimiento de la actitud crítica, lo que conlleva, con la práctica, al desarrollo de la competencia argumentativa.

Por su parte, la competencia interpretativa, que suele desarrollarse mediante la representación del conocimiento, fue trabajada por Sanabria, López y Leal (2014), quienes implementaron la construcción de recursos hipermediales de riqueza semántica, caracterizados por presentar conceptos organizados, relaciones precisas y una definición conceptual, articulada con la estructura denominada "ontología".

En el desarrollo de esta investigación se implementó el club de matemáticas del Instituto MINCA, con el propósito de generar espacios de trabajo en los cuales los estudiantes tuvieran la oportunidad de integrarse, interactuar y desarrollar procesos cognitivos alrededor de los desafíos matemáticos, así como también, fomentar el mejoramiento de las competencias previamente descritas.

En este contexto, se plantea como una alternativa de solución, al problema identificado, la propuesta del club de matemáticas, la cual parte de la idea de usar las representaciones múltiples como elemento fundante, en donde la representación ontológica, la discusión argumentada y la modelización dinámica permiten la representación y la resolución de problemas matemáticos. Un trabajo que incluía el uso de estas representaciones múltiples puede ser consultado en Maldonado, Lizcano, Pineda, Uribe y Bautista (2008), quienes concluyen que la utilización del ambiente para la representación estructurada de conocimiento permite un aporte al proceso cognitivo de los estudiantes, y, por otra parte, el modelado y simulación aportan en el proceso de comprensión de la complejidad, inherente a los fenómenos dinámicos.

Otro ejercicio de interés se referencia en León y Calderón (2003), quienes trabajaron con estudiantes de primeros semestres de universidad, para resolver problemas aritméticos y geométricos, concluyendo que estos son capaces de construir matemáticas a través de la argumentación. Investigadores como Jiménez (2007) asumen que la argumentación es la capacidad de relacionar datos y conclusiones, para evaluar enunciados teóricos a la luz de los datos empíricos o procedentes de otras fuentes. En este mismo sentido, Flores (2007) enuncia que cuando un estudiante de matemáticas realiza actividades de resolución de problemas, pone en juego una práctica argumentativa.

De otra parte, Nieto (2004) señala que la resolución de problemas está estrechamente relacionada con la creatividad, la cual puede ser definida como la habilidad para generar nuevas ideas y solucionar todo tipo de problemas y desafíos. En lo concerniente a la incapacidad que manifiestan algunos estudiantes para resolver, incluso el ejercicio más sencillo, Trujillo (2010) señala que no es producto, por lo general, de una deficiencia intelectual, sino de una absoluta falta de interés y motivación. En este sentido, autores como Bautista, Martínez e Hiracheta (2014) y Puentes, Roig, Sanhueza y Friz (2013) sostienen que el uso de las TI y los ambientes informáticos son una opción válida para atraer la atención de los estudiantes durante el desarrollo de sus procesos formativos.

Finalmente, en esta investigación se asumió el concepto de competencia, según lo propone Mora (2008), como el "saber hacer situado", es decir, la unión del conocimiento declarativo, el conocimiento procedimental y el conocimiento condicional; lo que implica un sujeto proactivo frente a la producción del conocimiento.

## | Marco teórico

La propuesta de club de matemáticas se ha diseñado con el propósito de promover el desarrollo de las competencias básicas identificadas en la introducción, acudiendo a las representaciones múltiples con ontologías, argumentación y modelado. En lo que sigue, se exponen diversas ideas alrededor de los clubes de matemáticas, la resolución de problemas, la representación ontológica, la discusión argumentada y el modelado colaborativo, como fundamentos teóricos para el diseño del club.

*Los clubes de matemáticas:* en relación con el desarrollo de experiencias exitosas, en Díez, Varley y Ksenija (2007), se ilustran las dinámicas generadas en el club de matemáticas de una escuela fronteriza de Estados Unidos, durante el curso 2005-2006. Otra experiencia similar ha sido relatada por Sánchez, García y Mora (2009), quienes, trabajando en el Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, crearon un espacio para identificar talentos matemáticos, cuyo interés fue buscar niños y jóvenes con habilidades para la resolución de problemas matemáticos. En H. García (2010), por su parte, se plantea que un club de matemáticas es un espacio que ayuda principalmente a generar en los estudiantes una actitud de aceptación hacia la matemática.

*Resolución de problemas:* según Alonso y Martínez (2003), la enseñanza de la matemática confronta serias dificultades, siendo una de las principales, la falta de éxito que tienen los estudiantes en el abordaje y resolución de problemas. Los mismos autores, citando a Schoenfeld (1985), sostienen que los trabajos sobre resolución de problemas han seguido principalmente cuatro enfoques, a saber: problemas presentados en forma escrita, matemáticas aplicadas o modelos matemáticos, estudio de los procesos cognitivos de la mente y determinación y enseñanza de los tipos de habilidades requeridas para resolver problemas matemáticos complejos

En este mismo sentido, en un trabajo de Aguilar, Navarro, López y Alcalde (2002), se encontró que existe relación entre la habilidad de razonamiento formal y el nivel de ejecución en problemas matemáticos. Asimismo, investigadores como Pifarré y Sanuy (2001) sostienen que los buenos "resolutores" de problemas se caracterizan por disponer de un conjunto de estrategias generales o heurísticas que guían su acción y que les ayudan a superar las dificultades que van encontrando durante el proceso de resolución.

Esta propuesta para la implementación de clubes de matemáticas se circunscribe principalmente en los aportes de Polya (2002), quien planteó la resolución de problemas como una serie de pasos: comprender el problema (representación ontológica), concebir un plan (argumentación), ejecutar dicho plan y examinar la solución (modelado y simulación). La propuesta también se apoya en la referencia que hace Santos (1996), en relación a que las matemáticas revelan patrones escondidos que ayudan a entender el mundo circundante, por medio de modelos matemáticos de fenómenos naturales, del comportamiento humano y de sistemas sociales. Por tanto, el proceso de desarrollar o producir matemáticas va más allá de realizar solo cálculos y deducciones; es decir, en este proceso también se incluye la observación de patrones (representación ontológica), la prueba de conjeturas (argumentación) y la estimación de resultados (modelado y simulación).

*Representación ontológica:* para Maldonado, Sanabria, Macías y Ortega (2001) el dominio de sistemas ontológicos, por parte de los estudiantes, se relaciona de manera significativa con la capacidad de aplicar estrategias para resolver problemas de descubrimiento. Para la representación del conocimiento se propuso el uso de Simas, software desarrollado por la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia. Este software permite la construcción de ontologías en forma de estructura hipermedial navegable, con una página para cada nodo de la red conceptual. A cada nodo se pueden incorporar textos, sonidos, gráficos o videos. Se asumió la definición de Gruber (1993), en la que una ontología constituye “una especificación formal y explícita de una conceptualización compartida” (Traducción libre). Según la lógica formulada por Minsky (1985), se muestra que el ser humano procesa bloques estructurados de información; de ahí la importancia del uso de Simas como posibilidad de representar la realidad mediante ontologías.

*Discusión argumentada:* en palabras de Drachman, De Groot y Maldonado (2012), la argumentación se da a través de la creación de un mapa argumentativo, en el que se relacionan expresiones textuales insertas en figuras geométricas, que son usadas para representar diferentes movimientos dialogales (argumentos, preguntas, afirmaciones, información, entre otros), siguiendo las categorías propuestas por Toulmin (2007). La discusión argumentada se operacionaliza mediante el software *Digalo*, desarrollado por el grupo Kishurim de la Universidad Hebrea de Jerusalén. Este ambiente informático está orientado al uso de la argumentación para la solución colaborativa de problemas. El software puede ser usado siguiendo una metodología de análisis de casos, buscando que los estudiantes aprendan a usar el lenguaje de *Digalo*, es decir, que sean capaces de usar las categorías antes mencionadas, que según De Groot et al. (2008), les permite resolver los casos y generar competencias cognitivas y argumentativas.

*Modelado colaborativo:* como estrategia de modelado y simulación, se usó la dinámica de sistemas; metodología creada en los años cincuenta por Forrester (1961). Los modelos construidos con dinámica de sistemas utilizan cinco lenguajes de formalización, ellos son: la prosa, los diagramas de influencias, los diagramas de flujos y niveles, matemático y los resultados, según se expone en Pineda (2005). *FreeStyler*, es una plataforma desarrollada por el grupo *Collide* de la Universidad *Duisburg-Essen*, que permite trabajar diferentes formas de modelado colaborativo. En *FreeStyler* se acepta de manera implícita la idea básica de modelado, expuesta por Aracil (1986), y que propone como principal fuente de información los modelos mentales del modelador.

A partir de los referentes teóricos previamente descritos, se diseñó la estructura del club de matemáticas como se muestra en la figura 1. Se invita al lector a consultar a Vergara y Castillo (2008) para una mayor descripción de los softwares utilizados en esta investigación, especialmente Simas.

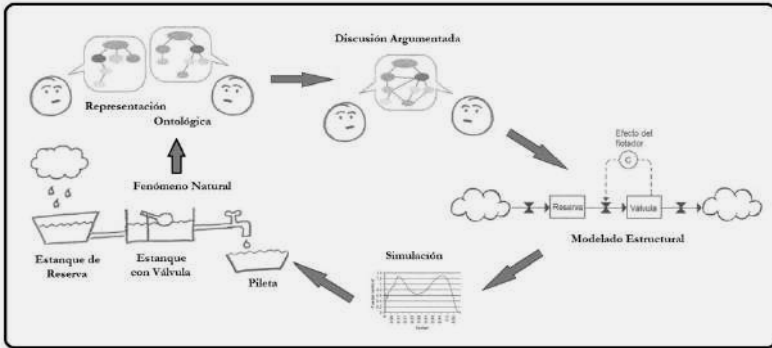


Figura 1. Representación del diseño de trabajo del club. Fuente: elaboración propia.

El trabajo dentro del club de matemáticas se proyectó para un tiempo de cuatro meses, con encuentros los días sábado de la mañana, para evitar interferencias con las clases. Cada desafío se desarrolló durante cuatro sábados, de la siguiente manera: el primer sábado se organizaron grupos de dos miembros del club, que se ubicaban en un computador y luego se procedía a realizar la lectura de la síntesis del desafío; además, debían buscar información en la Internet y elaborar la ontología usando *Simas*. Posteriormente, los estudiantes exponían las ontologías construidas. La figura 2a muestra ontologías construidas por los estudiantes de lo que, para ellos, representaba el fenómeno de llenado y vaciado de un tanque. Es importante observar en la figura 2a la diferencia en la representación del fenómeno, evidente a simple vista en las estructuras de las ontologías, además de las relaciones jerárquicas y los contenidos de información en cada uno de los nodos.

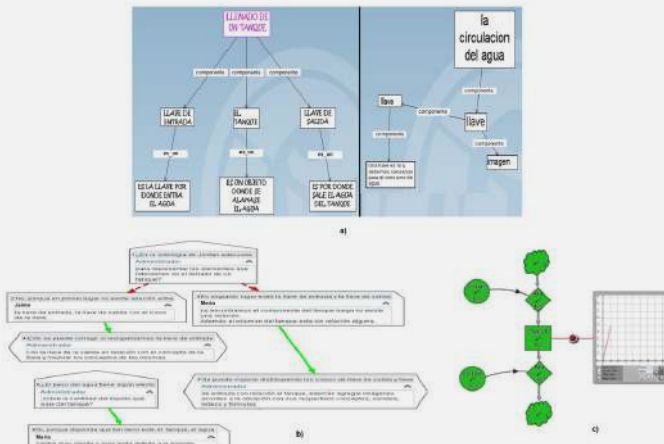


Figura 2. Ontologías, argumentaciones y modelo. Fuente: elaboración propia.

El segundo sábado, cada pequeño grupo revisaba la información asociada al desafío y, posteriormente, se procedía a realizar, en gran grupo, una discusión argumentada sobre todas las ontologías construidas, usando *Digalo*; como resultado de este trabajo se obtenía, al final, una ontología compartida. En figura 2b se observa una discusión alrededor de las ontologías construidas, en donde los participantes del club llegaban a un consenso sobre cuál era la ontología más completa y cómo podía ser complementada con elementos de las demás ontologías. Cada una de las figuras geométricas representa, ya sea un argumento, un enunciado, una pregunta, una afirmación, entre otros, y las líneas de color rojo y verde recrean desacuerdos y acuerdos, respectivamente.

En el tercer sábado se partía de la ontología compartida y se construía, junto a los asesores del club, un modelo dinámico que representaba el fenómeno en cuestión. En este paso se pedía a los estudiantes que identificaran las variables que constituían el fenómeno, clasificándolas como acumulaciones (niveles) o como razones de cambio (flujos). Una vez construido y aceptado el modelo, durante el cuarto sábado, se diseñaban tres escenarios de simulación, buscando explicar la razón del comportamiento mostrado por el modelo y su concordancia con el fenómeno tratado en el desafío.

La figura 2c muestra el modelo del tanque con dos llaves, una de entrada y otra de salida, además de la gráfica de comportamiento, que para este caso representa la manera en que aumenta la cantidad de agua dentro del tanque; esto debido a que la tasa de entrada de agua (razón de cambio) es superior a la de salida. Las figuras que conforman el modelo son, en este caso, el rectángulo (el tanque) que representa la variable que se acumula, el rombo que representa la razón de cambio (las llaves) y el círculo que representa los valores constantes, es decir, las tasas de salida y entrada de agua. Los siguientes desafíos del club fueron: el fenómeno de la caída libre, el comportamiento de una mezcla de agua y sal con entrada de agua pura y salida de la mezcla, y el problema del manejo de los residuos sólidos en la institución.

## | Metodología

Se utilizó una metodología principalmente cualitativa, considerando el análisis de los datos obtenidos, basado en un tipo de estudio descriptivo y exploratorio.

En la primera fase del proyecto se diseñó el club de matemáticas a partir de los referentes teóricos, relacionados con la resolución de problemas y las representaciones múltiples, teniendo como contexto la asignatura de Matemáticas del grado séptimo (ver figura 1). La segunda fase comprendió el diseño de las actividades del club, en las cuales se incluye la representación ontológica, las discusiones argumentadas y el modelado colaborativo para la resolución de cuatro desafíos matemáticos.

En la tercera fase se implementó el club de matemáticas, el cual estaba conformado por dos investigadores, una maestra y 12 estudiantes que, dentro de un total de 70 estudiantes del grado séptimo del Instituto MINCA, aceptaron la invitación para participar en esta investigación. El trabajo en el club se realizó por sesiones: en la primera sesión, los miembros del club, de forma colectiva, realizan el estudio y representación del desafío planteado por el investigador. En esta primera parte se usa el software *Simas* y se obtiene como producto, una ontología.

En la segunda sesión los estudiantes realizan la discusión argumentada sobre las ontologías previamente elaboradas en pequeños grupos, cuyo resultado es una representación ontológica compartida; esta parte se realiza con el software *Digalo*. En la tercera sesión se lleva a cabo el modelamiento del desafío, cuyo resultado final es un modelo de simulación que parte de la ontología compartida; esta parte se realiza usando el software *FreeStyler*. En la última sesión, los miembros del club realizan experimentos simulados para confrontar sus modelos mentales y, por tanto, generar conflictos cognitivos que, según Villani y Orquiza (1995) conducen al aprendizaje.

En la cuarta fase se realizó el análisis de los cuatro desafíos, aplicándose una tabla con las dimensiones asociadas a las ontologías y analizando el resultado de los test de entrada y salida mediante la estadística descriptiva. Inicialmente, se revisaban las ontologías y posteriormente se aplicaba un instrumento, adaptado de Maldonado et al. (2008), para su análisis; tal instrumento se compone por las dimensiones asociadas a la competencia interpretativa, además de la identificación de la estructura de las ontologías (número de nodos, niveles y relaciones utilizadas), el uso de textos, gráficos, videos y sonido, y el juicio valorativo.

## Resultados

A continuación, se presentan los resultados del pre-test y el post-test, así como el análisis de las ontologías realizadas por los estudiantes.

*Resultados del Pre-test:* a los estudiantes se les presentó tres desafíos, los cuales debían resolver y justificar cada una de sus respuestas. El propósito del pre-test era identificar los presaberes asociados a la capacidad para distinguir, en diferentes situaciones, procesos de acumulación, razones de cambio y comportamientos dinámicos y realimentados; conceptos fundamentales en la resolución de problemas. El pre-test fue aplicado a la totalidad de estudiantes del grado séptimo del Instituto MINCA (70 estudiantes). Los desafíos 1, 2 y 3 fueron tomados de J. García (2004).

En el primer desafío del pre-test, mostrado en la figura 3a, se les preguntaba: ¿cuál era el lado correcto que describía la salida de agua del tanque? Frente a esta pregunta tenían tres opciones de respuesta: derecha, izquierda y ninguna.

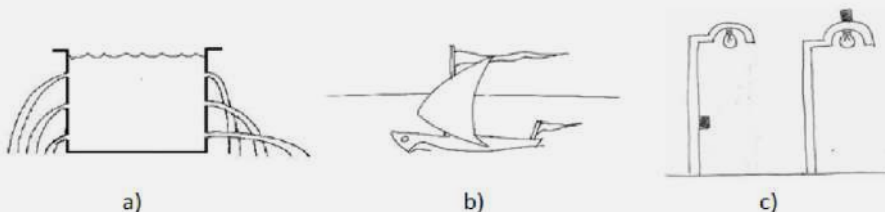


Figura 3. Gráficos de los desafíos del pre-test. Fuente: García (2004).



El primer desafío fue resuelto de manera acertada solo por el 33% de los estudiantes. Cuando se analizaron las argumentaciones, se encontró que el 80% fue deficiente, mientras que solo el 4% fue excelente, un 9% buena y el 7% regular. Una argumentación es excelente cuando da cuenta de la solución esperada, es buena cuando se aproxima a la argumentación esperada, regular cuando alcanza un cierto nivel que no se aleja del todo de lo esperado y deficiente cuando no da soporte a la solución obtenida. Se esperaba que el estudiante comprendiera que, a un mayor nivel de acumulación del líquido, el flujo de salida debía ser mayor por unidad de tiempo. Algunas de las argumentaciones dadas por los estudiantes fueron: “No se puede salir el agua sin una llave”, “Porque en los 2 lados no se puede decir si va a salir así porque el agua a veces no sale derecha a veces sale para abajo y se distribuye”.

En el segundo desafío se les preguntaba si era correcto o no, lo que la figura 3b mostraba. En este caso, aunque el 57% de los estudiantes acertó en la respuesta, el 58% de las argumentaciones fueron deficientes. En esta oportunidad se esperaba que el estudiante comprendiera la noción de causa y efecto, logrando establecer las inconsistencias que se presentaban entre la dirección de avance del velero y los banderines. Algunas de las argumentaciones fueron: “Para ir veloz necesita un motor bajo el agua para ir más rápido o remar”, “La bandera tiene que ir más adelante”.

Para el tercer desafío, ilustrado en la figura 3c, se les preguntó lo siguiente: ¿en qué posición instalarían el sensor de acuerdo con el dibujo? Las opciones de respuesta eran: derecha o izquierda. Los resultados mostraron que el 89% de los estudiantes acertaron este desafío. Una explicación a este hecho tiene que ver con que el fenómeno es familiar para ellos. Aunque fue alto el nivel de acierto, fue baja la calidad de las argumentaciones, pues solo se encontró que un 1% de estas eran excelentes y un 6% buenas. Las argumentaciones esperadas debían dar cuenta del concepto de realimentación (*feedback*), es decir, de la capacidad para comprender fenómenos de causalidad circular. A continuación, algunas argumentaciones: “Estando arriba detecta más rápido la luz, mientras que si está abajo se apagaría por detectaría la luz de la bombilla”, “El sensor lo capta mejor de arriba porque si fuera de la mitad, los ladrones se dan cuenta, en cambio los ladrones no miran hacia arriba, el sensor los capta”.

*Análisis de las ontologías de los cuatro desafíos:* para el análisis de las ontologías, trabajadas en el club, se emplearon criterios relacionados con el número de nodos, el número de niveles, y la calidad de los textos, de los gráficos y los videos del objeto representado, según se propone en Maldonado et al. (2008).

El primer elemento que se tuvo en cuenta a la hora de evaluar las ontologías fue su estructura, determinada esta por el número de nodos y niveles.

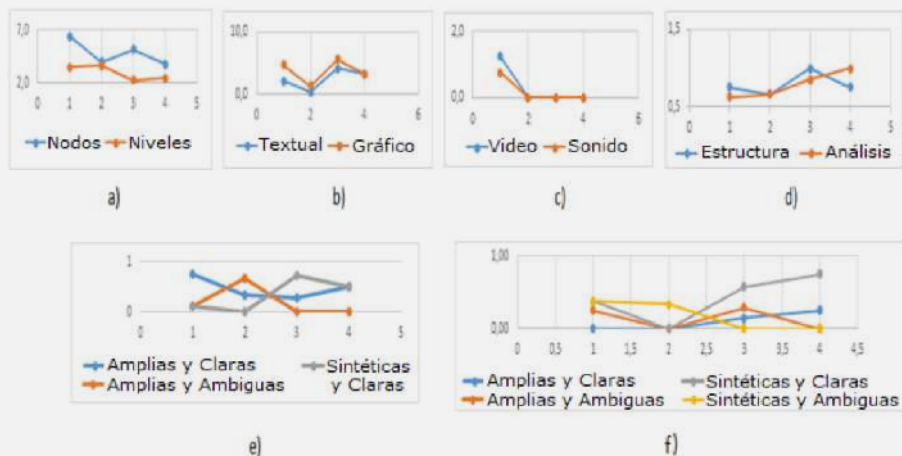


Figura 4. Análisis de las ontologías de los desafíos. Fuente: elaboración propia

De la figura 4a, se desprende que, tanto la cantidad de nodos como de niveles, se mantuvo casi constante, lo cual denota que no hubo mejoría en la habilidad para describir los fenómenos, acudiendo a mayores niveles de profundidad del conocimiento.

Los siguientes elementos de análisis, tenidos en cuenta, fueron la calidad y cantidad de descripciones, tanto escritas como gráficas y multimedia (sonido y video), que acompañaban a la estructura de la ontología. En cuanto al contenido, ver figura 4b, a medida que avanzaban los desafíos, los miembros del club iban incrementando la descripción textual dentro de los nodos de las ontologías, promoviendo así el ejercicio escritural y de representación. El comportamiento asociado al uso de gráficos en las ontologías se muestra casi constante, esto implica que no se observó un efecto sobre la inteligencia visual y espacial de los miembros del club, durante el desarrollo de los desafíos. En relación con el contenido multimedia, figura 4c, solo en el primer desafío se usó este tipo de recursos; la explicación de este hecho está relacionada con la dificultad que suponía, para los estudiantes, la consecución de videos y sonidos que representaran los fenómenos de cada desafío, los cuales iban aumentando en complejidad, y aunado a esto, la deficiente conexión a la internet.

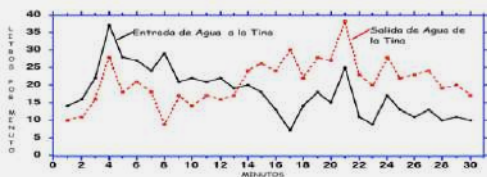
En la figura 4d se presentan los resultados asociados a la validez estructural y al nivel de análisis de las ontologías. Observando la figura 4d, se evidencia que hubo un incremento en la validez de las estructuras, tendencia que se revierte en el último desafío. Este comportamiento muestra que los estudiantes lograron un buen desempeño en la estructuración del conocimiento, lo cual está directamente asociado con la conformación de estructuras cognitivas, según lo proponen Maldonado et al. (2008).

Dentro de la categoría de juicio valorativo, se destaca que el nivel de comprensión presentó una mejora progresiva. Las tendencias en el nivel de comprensión muestran que a medida que avanzaba el trabajo en el club matemático, los estudiantes ganaban en capacidad explicativa de los fenómenos de cada desafío (ver figura 4e).

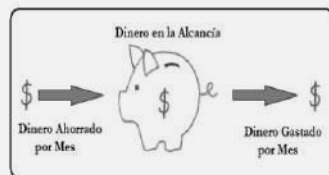
Es importante señalar que el nivel de comprensión está asociado también a la calidad de las explicaciones, es decir, en la medida que los estudiantes modificaban sus modelos mentales acerca de los fenómenos estudiados, lograban una mayor comprensión y, por tanto, más capacidad explicativa de la dinámica asociada a ellos. La figura 4f, muestra que la capacidad de explicación en los estudiantes fue mejorando, pues las explicaciones sintéticas y claras, aumentaban a medida que enfrentaban los desafíos.

*Resultados del Post-test:* con la aplicación del post-test se evaluó, de forma cualitativa, si la participación de los estudiantes en el club había tenido efectos en la comprensión de dos nociones importantes a la hora de resolver problemas matemáticos: la razón de cambio y la acumulación. Para ello se elaboró una prueba basada en Booth & Sterman (2000) y en Sterman (2002), que presentaba dos situaciones: el llenado de una tina y el comportamiento de una cuenta de ahorros.

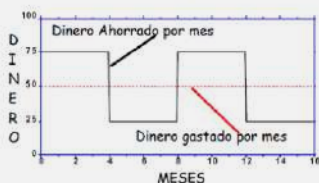
En el primer desafío, ver figura 5a, se muestra una gráfica que representa la cantidad de agua que entra y sale por minuto, de una tina. Después, se preguntaba: ¿En cuál minuto entró más agua al tanque? ¿En cuál minuto salió más agua del tanque? ¿En cuál minuto hubo más agua en el tanque? y ¿En cuál minuto hubo menos agua en el tanque?



a)



b)



c)

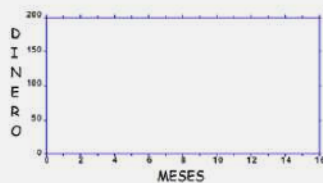


Figura 5. Gráficos de los desafíos del post-test. Fuente: Sterman (2002) y autores

Frente a la primera y segunda pregunta del desafío 1 se obtuvo un 87,5% y un 75% de respuestas acertadas, respectivamente. Estos resultados pueden ser explicados como consecuencia de haber comprendido la idea de razón de cambio, pero también por una interpretación simple de los puntos máximos que estaban presentes en la gráfica de entrada y salida de agua (revisar figura 5a).

Con respecto de la tercera y cuarta pregunta del desafío 1, solo el 12,5% y el 25% de las respuestas fueron acertadas, respectivamente. Estos resultados indican que, si bien los estudiantes comprendían la idea de razón de cambio, no ocurrió igual con el concepto de acumulación. Esto puede ser explicado como consecuencia de que la acumulación, por ser un fenómeno dinámico, no es explícito en la gráfica. Su comprensión habría requerido que los estudiantes hubiesen establecido que la cantidad de agua que se acumula dentro de la tina, correspondía al área que se forma entre las curvas de entrada y salida de agua.

Para el segundo desafío se les presentó a los estudiantes el caso de la alcancía, figura 5b, en la que se guarda dinero una vez al mes y se gasta mensualmente una cantidad fija. Luego los estudiantes veían la figura 5c, que muestra el comportamiento del dinero ahorrado y gastado durante 16 meses. Se les solicitaba que, a partir de esta información, dibujaran el comportamiento de la cantidad de dinero que había en la alcancía durante los 16 meses, suponiendo que al inicio en la alcancía había \$100.

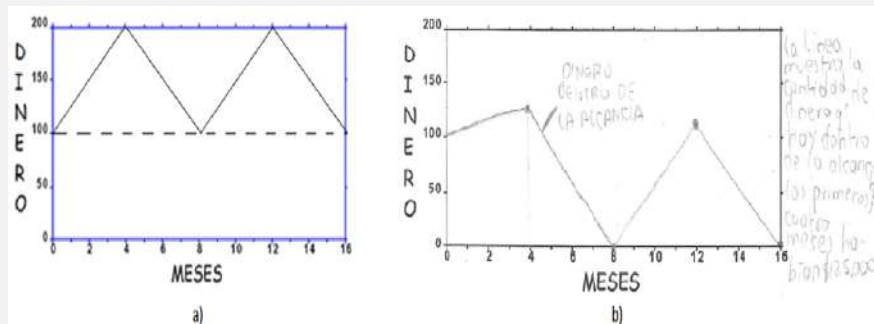


Figura 6. Solución y resultados del desafío 2 del post-test. Fuente: elaboración propia

Al revisar las respuestas de los estudiantes, se encontró que ninguno de ellos tuvo una respuesta satisfactoria, en cuanto al comportamiento cuantitativo de la gráfica (ver figura 6a), aunque un estudiante logró un buen desempeño al dibujar una gráfica, que cualitativamente correspondía con la solución esperada (ver figura 6b). Los resultados del segundo desafío, al igual que las respuestas a las preguntas tres y cuatro del primer desafío, ponen de manifiesto que los estudiantes no comprendieron la noción de acumulación. Una causa que explica esta situación es que los miembros del club, por ser estudiantes de séptimo grado, aún no tenían experiencia con el cálculo diferencial e integral. Para una experiencia relacionada con este experimento se recomienda revisar a Pineda, Calvete y Ruiz (2009).

## | Discusión

Uno de los efectos encontrados al usar los software seleccionados en el diseño del club, está justificado en la potencia que poseen para la representación del conocimiento, semejante a la forma en que el cerebro almacena y procesa la información, según Minsky (1985); además, como lo señala Santos (1996), las matemáticas deben revelar patrones escondidos que ayuden a entender el mundo, mediante modelos matemáticos de fenómenos naturales, del comportamiento humano y de sistemas sociales, y que, en términos de García, Coronado y Montealegre (2011) permitan el desarrollo del pensamiento matemático que opera sobre una red compleja de conceptos avanzados y elementales, articulados bajo diferentes contextos de representación, para construir y reconstruir significados matemáticos con un carácter local y eventualmente temporal.

Cuando se usa *Simas*, para construir ontologías, se está promoviendo la competencia interpretativa al desarrollar la capacidad de comprensión de un texto, problema, esquema, gráfico o mapa, y que, según Bracho y Ureña (2012), ocurre porque la mente humana es por su propia naturaleza interpretativa, es decir, trata de observar algo y buscarle significado; además, como lo exponen Maldonado, Londoño y Gómez (2017) el aprender desde la perspectiva ontológica tiene como subprocessos esenciales la comprensión, interpretación, contrastación y representación de modelos mentales y conceptuales.

Al usar *Digalo* para guiar las discusiones argumentadas, se promueve la competencia argumentativa y se favorece el proceso de modelado, que en palabras de Drachman y De Groot (2013) se constituye en oportunidades de aprendizaje, sobre todo cuando viene con soporte permanente por el lado de la discusión y la argumentación. Otro efecto encontrado fue que la competencia argumentativa se puede desarrollar mediante el proceso de resolución de problemas matemáticos, y que según Jiménez y Pineda (2013), esta forma de trabajo fortalece acciones como reflexionar, preguntar y argumentar, que son parte importante del desarrollo del pensamiento matemático y que, además, en palabras de Giordano, Moctezuma y Garnica (2015), este tipo de experiencias puede generar momentos particulares en el desarrollo de un curso, ya que es una oportunidad para que los estudiantes construyan significados compartidos.

Entre los resultados obtenidos, al analizar las ontologías realizadas, se encontró que el uso de los gráficos en estas, al ser casi constantes en número, permiten suponer que no hubo un efecto importante en el desarrollo de la inteligencia visual y espacial de los estudiantes, sobre el entendido de que esta inteligencia, como lo expresan Ramírez y Ramírez (2018), implica que el niño comprende la realidad a partir de los esquemas mentales que posee y los estímulos visuales que requiere; sin embargo, cuando los estudiantes construían los modelos, después de la discusión argumentada, mostraban una mejora en su capacidad para comprender los fenómenos estudiados, es decir, había un cambio en sus modelos mentales (Senge, 2006).

Los resultados de los desafíos abordados en el club muestran que, aunque los estudiantes no comprendieron la noción de acumulación, sí entendieron la noción de cambio, muy a pesar de ser estudiantes de séptimo grado, que aún no tienen experiencia con el cálculo diferencial e integral. La importancia de comprender la razón de cambio radica en que, como lo afirma Giordano et al. (2015), el tránsito de imágenes de la noción de razón de cambio (modelo mental), a imágenes apoyadas en relaciones cuantitativas (modelo formal), supone el entendimiento que permite conocer cómo y cuánto cambia el sistema o cuerpo dado (Luna, Chávez, Loera, Barrón y Salazar, 2013).

## | Conclusiones

El diseño del club fue ganando en robustez a medida que transcurrían las jornadas, y aunque surgieron algunos imprevistos, aparecieron sobre la marcha soluciones apropiadas para situaciones como la forma en que los estudiantes debían apropiarse del lenguaje de la representación ontológica, el uso de los elementos para las discusiones argumentadas y el manejo de las nociones de acumulación y razón de cambio al momento de construir y simular los modelos obtenidos.

Resultado del análisis de los pre-test, los post-test y la implementación del club, se encontró que los estudiantes usan sus competencias matemáticas principalmente para resolver los desafíos, pero por falta de habilidad argumentativa, no son capaces de explicar el proceso, es decir, operan con números y símbolos, pero sin hacer conciencia que estos representan otras cosas.

El análisis de las ontologías realizadas por los miembros del club, permitió identificar un creciente aumento en la capacidad para describir los fenómenos a partir de la estructuración del conocimiento en formas de ontologías, e incluso en la construcción consensuada de las mismas, aunque no se logra el avance esperado en la representación de la dinámica asociada a dichos fenómenos.

El aporte fundamental de esta investigación lo constituye el diseño del club de matemáticas, que toma en consideración aportes teóricos de las representaciones múltiples, señalando una ruta que va desde la interpretación individual del fenómeno, pasando por una interpretación compartida del mismo, hasta llegar al modelado colaborativo, el cual permite el desarrollo de la experimentación simulada y la posterior intervención más consciente al fenómeno; entendiéndose esto como un proceso cíclico.

## | Agradecimientos

A la Universidad Nacional Abierta y a Distancia por su apoyo durante el desarrollo de la investigación PG-22-2010, titulada: "Propuesta para la implementación de clubes de matemáticas usando *Digalo, Simas y FreeStyler*", de la cual se deriva el presente artículo.

## | Financiación

Universidad Nacional Abierta y a Distancia, Escuela de Ciencias Básicas, Tecnología e Ingeniería, Línea de Investigación: Gestión de Sistemas, CDP Nro. 1641.

## Referencias

- Aguilar, M., Navarro, J., López, J. y Alcalde, C. (2002). Pensamiento formal y resolución de problemas matemáticos. *Psicothema*, 14(2), 382-386.
- Alonso, I. y Martínez, N. (2003). La resolución de problemas matemáticos. Una caracterización histórica de su aplicación como vía eficaz para la enseñanza de la matemática. *Revista Pedagogía Universitaria*, 8(3), 81-88.
- Aracil, J. (1986). *Máquinas, sistemas y modelos*. Madrid, España: Tecnos.
- Bautista, M., Martínez, A. e Hiracheta, R. (2014). El uso de material didáctico y las tecnologías de información y comunicación (TIC's) para mejorar el alcance académico. *Ciencia y Tecnología*, 14, 183-194.
- Booth, L. & Sterman, J. (2000). Bathtub Dynamics: Initial Results of a Systems Thinking Inventory. *System Dynamics*, 16(4), 249-286.
- Bracho, K. y Ureña, Y. (julio-diciembre, 2012). Ontología para el desarrollo de la investigación como cultura. *En-claves del Pensamiento*, (12), 11-29. Recuperado de <http://www.scieo.org.mx/pdf/enclav/v6n12/v6n12a1.pdf>
- De Groot, R., Drachman, R., Maldonado, L., Landazábal, D., González, L., Garzón, B. y Cardona, M. (2008). Dígalos y procesos de argumentación: conformación de comunidades aprendizaje y emergencia de factores de resiliencia y transferencia a la vida cotidiana. *Investigaciones de la Unad*, 7(1), 189-216.
- Díez, J., Varley, M. y Ksenija, S. (2007). El Club de Matemáticas. Una experiencia cultural de matemáticas de la vida cotidiana, para la diversidad. UNO. *Revista de didáctica de las matemáticas*, (45), 99-106. Recuperado de <http://dialnet.unirioja.es/objeto/157344>
- Drachman, R. y De Groot, R. (2013). El modelamiento en economía. En L. F. Maldonado (Ed.), *El modelamiento matemático en la formación del ingeniero* (pp. 55-74). Bogotá, Colombia: Ediciones Fundación Universidad Central.
- Drachman, R., De Groot, R. y Maldonado, L. (2012). *Argumentación para el aprendizaje colaborativo de la matemática*. Bogotá, Colombia: Ediciones Fundación Universidad Central.
- Flores, Á. (abril, 2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. *Educación Matemática*, 19(1), 63-98.
- Forrester, J. (1961). *Industrial Dynamics*. Cambridge, USA: The M.I.T. Press.
- Gamboa, M. y Castro, J. (2016). La argumentación a través del software Dígalos para la construcción colaborativa de Aprendizajes en el área de Ciencias. *Revista Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, 1455-1463. Recuperado de <http://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/TED/article/view/4768/3901>

- García, H. (2010). *Club de Matemáticas del CCH Naucalpan. Naucalpan, México*: Universidad Nacional Autónoma de México. Recuperado de <http://intermat.ciencias.unam.mx/hector/introducciongeom.pdf>
- García, J. (2004). *Conceptos de Dinámica de Sistemas*. Barcelona, España: Juan Martín García.
- García, B., Coronado, A. y Montealegre, L. (enero-abril, 2011). Formación y desarrollo de competencias matemáticas: una perspectiva teórica en la didáctica de las matemáticas. *Revista Educación y Pedagogía*, 23(59), 159-175. Recuperado de <http://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/revistaeyp/article/view/8715>
- Giordano, M., Moctezuma, O. y Garnica, I. (2015). Razón de cambio e identificación del movimiento. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 518-526. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/10818/1/Giordano2015Razon.pdf>
- Gruber, T. (1993). A Translation Approach to Portable Ontology Specifications. *Knowledge Acquisition*, 5(2), 199-220. Recuperado de <http://tomgruber.org/writing/ontologin-gua-kaj-1993.pdf>
- Ibarguen, L. (2017). La escritura en una wiki como potenciadora de la competencia propositiva en estudiantes de básica primaria. En *XVIII Encuentro Internacional Virtual Educa*. Encuentro llevado a cabo en Bogotá, Colombia.
- Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación –ICFES-. (2019). *Reporte histórico de resultados pruebas Saber 3, 5 y 9*. Recuperado de <http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/seleccionReporte.jsp>
- Jiménez, M. (2007). Comunicación y lenguaje en la clase de ciencias. *Revista Enseñar Ciencias*, 55-71.
- Jiménez, A. y Pineda, L. (2013). Comunicación y argumentación en clase de matemáticas. *Revista Educación y Ciencia*, (16), 101-116. Recuperado de [https://revistas.uptc.edu.co/revistas/index.php/educacion\\_y\\_ciencia/article/download/3243/2920/](https://revistas.uptc.edu.co/revistas/index.php/educacion_y_ciencia/article/download/3243/2920/)
- León, O. L. y Calderón, D. (2003). *Argumentar y validar en matemáticas: ¿una relación necesaria? hacia una comprensión del desarrollo de competencias argumentativas en matemáticas*. Cali, Colombia: COLCIENCIAS.
- Luna, J., Chávez, O., Loera, E., Barrón, J. y Salazar, M. (septiembre-diciembre, 2013). Comprensión del concepto de la derivada como razón de cambio. *Revista Culcyt*, 10(51), 4-14. Recuperado de <http://148.210.132.19/ojs/index.php/culcyt/article/view/934/870>
- Maldonado, L., Lizcano, A., Pineda, E., Uribe, V. y Bautista, J. (2008). Comunidades de aprendizaje mediadas por redes informáticas. *Educación y Educadores*, 11(1), 199-224.
- Maldonado, L., Londoño, O. y Gómez, J. (2017). Sistemas ontológicos en el aprendizaje significativo: estado del arte. *Revista Electrónica "Actualidades Investigativas en Educación"*, 17(2), 1-18. Recuperado de <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/aie/article/view/28730/28727>



- Maldonado, L., Sanabria, L., Macías, D. y Ortega, N. (2001). *Ontología y aprendizaje de la Geografía: software para representar y software para comprender*. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional y Colciencias.
- Minsky, M. (1985). *The Society of Mind*. New York, United States: Simon & Shuster.
- Mora, A. (2008). Experiencias Formación de Profesores Universitarios en Competencias Docentes. En *Evaluación del Aprendizaje Universitario* (pp. 1-11). Cali, Colombia: Pontificia Universidad Javeriana.
- Nieto, J. (2004). *Resolución de problemas matemáticos*. Maracaibo, Venezuela: Talleres de Formación Matemática.
- Niño, V. (2011). *Competencias en la comunicación. Hacia las prácticas del discurso*. Bogotá, Colombia: Ecoediciones.
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos –OCDE-. (2014). *Education at a Glance 2014: OECD Indicators*. Recuperado de <http://dx.doi.org/10.1787/eag-2014-en>
- Pifarré, M. y Sanuy, J. (2001). La enseñanza de resolución de problemas en la ESO: Un ejemplo concreto. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(2) 297-308.
- Pineda, E. (2005). *Un reconocer a nivel práctico de las diferencias y coincidencias de los enfoques de modelado conductista y estructural en la economía*. Bucaramanga, Colombia: UIS.
- Pineda, E. y Landazábal, D. (enero-junio, 2010). Reflexiones sobre el proceso de modelado: Una perspectiva dinámico-sistémica. *Revista Científica Guillermo de Ockham*, 8(1), 95-104. Recuperado de <http://bibliotecadigital.usb.edu.co:8080/bitstream/10819/5092/1/557-1409-1-PB.pdf>
- Pineda, E., Calvete, F. y Ruiz, F. (junio, 2009). El modelado y simulación para la comprensión de sistemas de producción de pozos petroleros. *Revista de investigaciones UNAD*, 8(1), 137-159. Recuperado de <http://hemeroteca.unad.edu.co/index.php/revista-de-investigaciones-unad/article/view/625/1344>
- Polya, G. (2002). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- Puentes, A., Roig, R., Sanhueza, S. y Friz, M. (enero, 2013). Concepciones sobre las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) y sus implicaciones educativas: Un estudio exploratorio con profesorado de la provincia de Ñuble, Chile. *Revista Iberoamericana de Ciencia, Tecnología y Sociedad*, 8(22), 75-88.
- Ramírez, Z. y Ramírez, T. (2018). Inteligencias Múltiples en el trabajo docente y su relación con la Teoría del Desarrollo Cognitivo de Piaget. *Revista Killkana Sociales*, 2(2), 47-52 Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6538370>

- Restrepo, B. (2013). Fundamentos teóricos de la evaluación por competencias: trazabilidad histórica del concepto. *Uni-pluri/versidad*, 13(2), 14-23. Recuperado de [http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/bitstream/123456789/1972/1/GomezBernardo\\_2013\\_informesinvestigacionensayos.pdf](http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/bitstream/123456789/1972/1/GomezBernardo_2013_informesinvestigacionensayos.pdf)
- Ruiz, N., Villamil, L., Vergel, J. y Aguilar, D. (2018). La importancia de la discusión oral entre pares estudiantiles para el desarrollo de la competencia argumentativa en el currículo de Lenguaje de primaria. Un estudio de caso en un colegio rural de Colombia. *Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación*, 9(1), 77-92. Recuperado de <https://doi.org/10.18175/-vys9.1.2018.05>
- Sanabria, L., López, O. y Leal, L. (julio-diciembre, 2014). Desarrollo de competencias metacognitivas e investigativas en docentes en formación mediante la incorporación de tecnologías digitales: aportes a la excelencia docente. *Revista Colombiana de Educación*, (67), 147-170. Recuperado de <https://www.redalyc.org/pdf/4136/413638647003.pdf>
- Sánchez, L., García, O. y Mora, L. (2009). Ver, describir y simbolizar en el club de matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. En *10 Encuentro Colombiano de Matematica Educativa*. Encuentro llevado a cabo en Asocolme. Pasto, Colombia.
- Santos, M. (1996). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamericano.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York, United States: Academic Press.
- Senge, P. (2006). *La quinta disciplina. El arte y la práctica de la organización abierta al aprendizaje*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Granica.
- Sterman, J. (2002). All models are wrong: reflections on becoming a systems scientist. *System Dynamics Review*, 18(4), 501-531. Recuperado de <http://jsterman.scripts.mit.edu/docs/Sterman-2002-AllModelsAreWrong.pdf>
- Toulmin, S. (2007). *Los usos de la argumentación*. Barcelona, España: Península.
- Trujillo, G. (2010). Recursos audiovisuales e informáticos en el aula. *Enfoques Educativos*, 52-62.
- Vergara, M. y Castillo, J. (octubre, 2008). Competencias en ciencias: los ambientes digitales Simas y Coolmodes. *Nómadas*, (29), 213-225. Recuperado de [http://nomadas.ucentral.edu.co/nomadas/pdf/nomadas\\_29/29\\_16VC\\_Competenciasciencias.pdf](http://nomadas.ucentral.edu.co/nomadas/pdf/nomadas_29/29_16VC_Competenciasciencias.pdf)
- Villani, A. y Orquiza, L. (1995). Conflictos cognitivos, experimentos cualitativos y actividades didácticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 13(3), 279-294. Recuperado de <https://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/21418/93379>